

Über eine Verallgemeinerung von Jordan-Algebren

von

HOLGER PETERSSON

München 1966

1965.

Über eine Verallgemeinerung

von Jordan-Algebren.

Inaugural - Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde der

Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Ludwig - Maximilians - Universität München.

vorgelegt von

Holger Petersson

aus Münster (Westf)

München, 16. Juli 1965



1. Referent: Prof. Dr. M. Koecher

2. Referent: Prof. Dr. F. Kasch

Mündliche Prüfung: 22. Dezember 1965

Druck: Mikrokopie GmbH . München . Bruderstr. 9

Inhaltsverzeichnis

Einleitung.	2
I Grundlegende Eigenschaften der Lie-Tripel-Algebren.	
§0. Grundbegriffe der Algebrentheorie.	6
§1. Definition und einfache Folgerungen.	11
§2. Die Peirce-Zerlegung.	16
§3. Hilfssätze zum Begriff des Minimalpolynoms.	23
§4. Assoziative Bilinearformen.	28
§5. Ein Radikalbegriff.	34
§6. Beispiele.	44
II Der Struktursatz von WEDDERBURN.	
§1. Eine notwendige Bedingung.	55
§2. Konservative Lie-Tripel-Algebren.	57
§3. Einige Hilfssätze.	68
§4. Ein wichtiger Spezialfall.	74
§5. Eine Wedderburn-Zerlegung unter der Annahme „ $(\text{Rad } \mathfrak{A})^2 = 0$ “.	85
§6. Weitere Hilfssätze.	88
§7. Die allgemeine Wedderburn-Zerlegung.	94
Literaturverzeichnis	101



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung.

Bei einer vorgegebenen Klasse $\mathfrak{A}$ nicht-assoziativer Algebren über einem festen Körper (von der vernünftigerweise zu fordern wäre, daß sie mit einem Element α auch alle davon entworfenen homomorphen Bilder enthält und gegenüber der Bildung direkter Summen abgeschlossen ist) genießen vor allem die beiden folgenden Problemkreise ein traditionell großes Interesse. *)

- 1.) Die vollständige Klassifikation sämtlicher einfachen Vertreter von $\mathfrak{A}$.
 - 2.) Die Konstruktion eines adäquaten Radikalbegriffs, welche in jeder Algebra $\alpha \in \mathfrak{A}$ eindeutig ein Ideal $\text{Rad}\alpha$ (das Radikal von α) auszeichnet, so daß, wenn man ein $\alpha \in \mathfrak{A}$ mit dem Radikal Null halbeinfach nennt, die folgenden Aussagen gelten:
- (A) Die Faktor-Algebra $\alpha/\text{Rad}\alpha$ ist halbeinfach.
 - (B) Aus der Halbeinfachheit von $\alpha/\mathfrak{q}$ für ein Ideal $\mathfrak{q}$ in α folgt $\text{Rad}\alpha \subset \mathfrak{q}$.
 - (C) α ist halbeinfach dann und nur dann, wenn α sich darstellen läßt als direkte Summe einfacher Ideale. Insbesondere folgt aus der Einfachheit einer Algebra ihre Halbeinfachheit.
 - (D) Es gilt der sogenannte Struktursatz von WEDDERBURN: Zu jeder Algebra $\alpha \in \mathfrak{A}$ gibt es eine Unteralgebra $\mathfrak{T}$ von α mit $\alpha = \mathfrak{T} \dot{+} \text{Rad}\alpha$.

*) Bezüglich der im folgenden verwandten Symbole und Begriffe vergleiche man I, §0 und die explizit zitierten Stellen.

Für Jordan-Algebren ist das durch diese Aufgaben umrissene Programm vollständig realisiert worden ([2], [7], [10] des Literaturverzeichnisses). Gleichzeitig scheint dieser Algebrentyp eine logische Situation zu markieren, zu der keine echte Verallgemeinerung existiert, die sich mit der gleichen Schärfe übersehen ließe.

Als Prototyp solcher echten Verallgemeinerungen darf die Klasse der kommutativen potenz-assoziativen Algebren gelten. Hat der Grundkörper die Charakteristik 0, so kann man den Problemkreis 1.) als gelöst betrachten, sofern man nur den „pathologischen“ Grenzfall, daß eine Algebra mit lauter nilpotenten Elementen vorliegt, außer Betracht zieht ([6]). Was 2.) betrifft, so läßt sich auf recht naheliegende Weise ein Radikalbegriff konzipieren, für den im Falle der Charakteristik 0 die Aussagen (A) - (C) bestehen ([3], [6]). Über die Gültigkeit des Struktursatzes von Wedderburn ((D)) ist bis heute nichts bekannt. Insbesondere hat man bisher keine hinreichenden Bedingungen anzugeben vermocht, die den durch die Jordan-Algebren gesteckten Rahmen übersteigen und eine Wedderburn-Zerlegung ermöglichen.

In dieser Arbeit wird mit den sogenannten Lie-Tripel-Algebren eine andere Verallgemeinerung der Jordan-Algebren definiert und die Frage untersucht, in welchem Ausmaße sich hier die in 1.), 2.) erwähnten Probleme erfolgreich angreifen lassen. Die Arbeit zerfällt in zwei Abschnitte.

Der erste beschäftigt sich vor allem mit der Fixierung von Grundbegriffen, deren Analoga sich bei Untersuchungen in Jordan-Algebren bewährt haben. Im ersten Paragraphen legen wir die Definition und die einfachsten daraus sich ergebenden

Folgerungen vor. Insbesondere wird der Zusammenhang mit den potenz-assoziativen Algebren aufgeklärt. Es zeigt sich, daß eine Lie-Tripel-Algebra genau dann potenz-assoziativ ist, wenn sie eine Jordan-Algebra darstellt. Der zweite Paragraph bringt ein für Strukturuntersuchungen unentbehrliches Hilfsmittel: Die Peirce-Zerlegung nach einem Idempotent und einem System von solchen. §3 behandelt den Begriff des Minimalpolynoms eines Elementes in beliebigen, nicht notwendig potenz-assoziativen Algebren. Insbesondere wird mit der Hauptspur eine Linearform konstruiert, die für Lie-Tripel-Algebren eine wichtige Rolle spielt.

In §4 untersuchen wir assoziative Linearformen λ auf einer Lie-Tripel-Algebra $\mathcal{A}$. Es wird gezeigt, daß die Faktor-Algebra $\mathcal{A}/\text{Ker}_\lambda(\mathcal{A})$ stets eine Jordan-Algebra darstellt. Anschließend werden auf einer beliebigen Lie-Tripel-Algebra zwei Beispiele assoziativer Linearformen explizit konstruiert und überdies hinreichende Bedingungen angegeben, unter denen sie nicht identisch verschwinden. Eine Anwendung dieser Sätze ergibt, daß eine einfache Lie-Tripel-Algebra über einem Körper der Charakteristik 0, welche ein Idempotent besitzt, bereits eine Jordan-Algebra ist. Der Problemkreis 1.) hat damit (im Falle der Charakteristik 0) eine fast vollständige Lösung gefunden. Offen bleibt allerdings die Frage nach einfachen Lie-Tripel-Algebren ohne Idempotente.

In §5 wird für Lie-Tripel-Algebren ein Radikal definiert. Wir werden dort eine Begriffsbildung entwickeln, die sich zwar für beliebige Algebren über beliebigem Grundkörper logisch sinnvoll formulieren läßt, aber nur im Falle der sogenannten eigentlichen Lie-Tripel-Algebren (zu denen sowohl die Jordan-Algebren als auch die Lie-Tripel-Algebren der Charakteristik 0 zählen) die Bezeichnung „Radikal“ intuitiv zu rechtfertigen

vermag: Zwar ist stets eine in diesem Sinne halbeinfache Algebra als direkte Summe einfacher Ideale darstellbar, doch umgekehrt lassen sich einfache Lie-Tripel-Algebren, welche ein Idempotent besitzen, nur dann als halbeinfach nachweisen, wenn sie eigentlich sind. Dann gelten, die Existenz von Idempotenten vorausgesetzt, die Aussagen (A) - (C) in 2.).

Der §6 bringt schließlich eine Beispielklasse nicht potenzassoziativer Lie-Tripel-Algebren.

Der zweite Abschnitt dieser Arbeit beschäftigt sich mit dem Wedderburn'schen Struktursatz für Lie-Tripel-Algebren. Zunächst leiten wir in §1 eine notwendige Bedingung für seine Gültigkeit her, aus der insbesondere hervorgeht, daß er für keinen Vertreter der im Paragraphen 6 des ersten Abschnitts konstruierten Beispielklasse erfüllt ist. Sodann zeigen wir den Struktursatz in mehreren Schritten für solche Lie-Tripel-Algebren, die einer gewissen Verschärfung der in §1 gewonnenen notwendigen Bedingung gehorchen und deren Radikal sich einer recht komplizierten, jedoch im Falle seiner Auflösbarkeit mit Sicherheit realisierten Forderung zu unterwerfen hat. Schließlich bringen wir einige Beispiele, welche den Voraussetzungen des Satzes von Wedderburn genügen und keine Jordan-Algebren sind.

Herr Prof. Dr. M. Koecher hat diese Arbeit angeregt und durch viele äußerst nützliche und wertvolle Hinweise sowie sein lebhaftes Interesse stark gefördert. Dafür möchte ich ihm sehr herzlich danken.

I Grundlegende Eigenschaften der Lie-Tripel-Algebren.

§ 0. Grundbegriffe der Algebrentheorie.

1. In der vorliegenden Untersuchung verstehen wir unter einem Körper K stets einen kommutativen Körper. Ein Vektorraum X endlicher Dimension über K zusammen mit einer bilinearen Komposition (Multiplikation) $X \times X \rightarrow X$ heißt eine Algebra $\mathcal{A}$ über K . Für „ $u \in X$ “ schreiben wir stets „ $u \in \mathcal{A}$ “. Bei festem $u \in \mathcal{A}$ wird durch

$$v \rightarrow uv \text{ bzw. } v \rightarrow vu$$

eine lineare Transformation $L(u)$ (die linksreguläre Darstellung von u in $\mathcal{A}$) bzw. $R(u)$ (die rechtsreguläre Darstellung von u in $\mathcal{A}$) des Vektorraumes X definiert. Offenbar sind $L(u)$ und $R(u)$ ihrerseits linear und homogen in u , weshalb

$$(0.1) \quad L(\mathcal{A}) := \{L(u); u \in \mathcal{A}\}, \quad R(\mathcal{A}) := \{R(u); u \in \mathcal{A}\}$$

jeweils Unterräume von $\text{Hom}(X)$ bilden.

Für zwei Elemente $u, v \in \mathcal{A}$ definieren wir den Kommutator $[u, v]$ durch

$$(0.2) \quad [u, v] := uv - vu.$$

Ist außerdem ein Element w in $\mathcal{A}$ gegeben, so erklären wir den Assoziator (u, v, w) durch

$$(0.3) \quad (u, v, w) := (uv)w - u(vw).$$

2. Ist auch $\mathcal{L}$ eine Algebra über K , so heißt eine lineare Transformation $W: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}$ ein (Algebren -) Homomorphismus, wenn

$$(0.4) \quad W(uv) = WuWv$$

für alle $u, v \in \mathcal{A}$ gilt. Ein Untervektorraum $\mathcal{I}$ von $\mathcal{A}$ heißt ein Ideal in $\mathcal{A}$, wenn mit $u \in \mathcal{I}$ und $v \in \mathcal{A}$ sowohl uv als auch vu zu $\mathcal{I}$ gehört. Auf kanonische Weise läßt sich für ein

Ideal $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{A}$ die Faktor-Algebra $\mathcal{A}/\mathfrak{A}$ erklären, welche aus den Restklassen der Elemente $u \in \mathcal{A}$ modulo $\mathfrak{A}$ besteht. Diese bezeichnen wir in der Regel mit $u + \mathfrak{A}$, gelegentlich aber auch mit $[u]_{\mathfrak{A}}$. Das von einer Menge $E \subset \mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ erzeugte Ideal bezeichnen wir mit (E) . Die Algebra $\mathcal{A}$ heißt einfach, wenn sie nur die trivialen Ideale 0 und $\mathcal{A}$ hat und nicht die Nullalgebra ist, d.h. wenn überdies Elemente $u, v \in \mathcal{A}$ existieren mit $uv \neq 0$.

3. Y und Z seien Unterräume der Algebra $\mathcal{A}$ über K . Mit $Y + Z$ bezeichnen wir wie üblich den von $Y \cup Z$ in $\mathcal{A}$ erzeugten Vektorraum. Dafür schreiben wir auch $Y + Z$, wenn $Y \cap Z = 0$ gilt. Gelegentlich werden wir den von einer Menge $E \subset \mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ aufgespannten Unterraum durch $\langle E \rangle$ wiedergeben. Für $u \in \mathcal{A}$ benutzen wir häufig die Schreibweise Ku an Stelle von $\langle \{u\} \rangle$. Den Vektorraum

$$\langle \{yz; y \in Y, z \in Z\} \rangle$$

werden wir stets durch YZ abkürzen.

Sind $\mathfrak{X}, \mathfrak{L}$ Unteralgebren von $\mathcal{A}$, so haben die Symbole $\mathfrak{X} + \mathfrak{L}$, $\mathfrak{X} \dot{+} \mathfrak{L}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{L}$ nunmehr einen vernünftigen Sinn. Für $\mathfrak{X} = \mathfrak{L}$ werden wir stets $\mathfrak{X}^2$ an Stelle von $\mathfrak{X}\mathfrak{X}$ schreiben. Außerdem werden wir von $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{L}$, der direkten Summe von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{L}$, sprechen, wenn

$$(0.5) \quad \mathfrak{X}\mathfrak{L} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{L} = 0$$

gilt. In diesem Falle stellt offenbar auch $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{L}$ eine Unter algebra von $\mathcal{A}$ dar. Es ist klar, wie man nun direkte Summen mit mehr als zwei Summanden zu verstehen hat.

4. Ein Element $e \in \mathcal{A}$ heißt Einselement von $\mathcal{A}$, wenn $e \neq 0$ und $eu = ue = u$ für alle $u \in \mathcal{A}$ gilt. Es ist klar, daß eine Algebra höchstens ein Einselement haben kann. Zu einer beliebigen

Algebra $\mathcal{A}$ kann man stets ein Einselement e adjungieren (vgl. [1], I, §2). Die so entstehende Algebra bezeichnen wir mit $\hat{\mathcal{A}}$ und läßt sich in der Gestalt

$$\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + Ke$$

darstellen. Die linksreguläre Darstellung eines Elementes $u \in \hat{\mathcal{A}}$ kürzen wir durch $\hat{L}(u)$ ab. Entsprechend ist $\hat{R}(u)$ und $\hat{Id}$ zu verstehen.

Für natürliche Zahlen m definieren wir die Potenzen u^m eines Elementes $u \in \mathcal{A}$ induktiv durch

$$(0.6) \quad u^1 := u, \quad u^{m+1} := uu^m.$$

Hat $\mathcal{A}$ ein Einselement e , so setzen wir überdies $u^0 := e$. Das Schema (0.6) wird dadurch nicht berührt. Wir definieren weiter, wenn m eine natürliche Zahl ist:

$$(0.7) \quad K_m[u] := \langle \{u^\mu; \mu \geq m, \text{ ganz} \} \rangle$$

und außerdem

$$(0.7)^* \quad K[u] := \langle \{u^\mu; \mu \geq 0, \text{ ganz} \} \rangle,$$

wenn $\mathcal{A}$ ein Einselement e hat.

Ein Element c der Algebra $\mathcal{A}$ heißt idempotent oder ein Idempotent, wenn $c = c^2 \neq 0$ gilt. Ein $u \in \mathcal{A}$ heißt nilpotent oder ein Nilpotent, wenn eine natürliche Zahl m mit $u^m = 0$ existiert.

$\mathcal{A}$ heißt eine Nilalgebra, wenn jedes Element von $\mathcal{A}$ nilpotent ist. Analog verwenden wir den Begriff des Nilideals.

5. Ist $\tilde{K}$ ein Erweiterungskörper von K , dann kann man die aus $\mathcal{A}$ durch Grundkörper-Erweiterung von K zu $\tilde{K}$ entstehende Algebra betrachten (vgl. [1], I, §2). Diese bezeichnen wir meist mit $\tilde{\mathcal{A}}$, gelegentlich aber auch mit $\mathcal{A}_{\tilde{K}}$. In solchen Fällen werden wir auch von (Grundkörper -) Erweiterungen von $\mathcal{A}$ sprechen. Sei speziell τ eine Unbestimmte über K und $\tilde{K} := K(\tau)$. Gelten dann Polynomidentitäten in $\tilde{\mathcal{A}}$, so gewinnt man durch

Einsetzen von $u + \tau v$ ($u, v \in \mathfrak{A}$) Identitäten, die in $\mathfrak{A}$ gelten. Dieser Prozeß wird als Polarisation bezeichnet.

6. Die Algebra $\mathfrak{A}$ über dem Körper K heißt kommutativ bzw. assoziativ, wenn ihre Multiplikation die entsprechende Eigenschaft hat. Ist X ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K , so kann man den Vektorraum $\text{Hom}(X)$ durch die übliche Komposition von Abbildungen zu einer assoziativen Algebra $\mathfrak{L}(X)$ machen. Liegt an Stelle von X eine Algebra $\mathfrak{A}$ vor, so sprechen wir auch von $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$.

Eine Algebra $\mathfrak{L}$ über K heißt eine Lie-Algebra, wenn

$$(0.8) \quad u^2 = 0,$$

$$(0.8)^* \quad (uv)w + (wu)v + (vw)u = 0$$

für alle $u, v, w \in \mathfrak{L}$ erfüllt ist. Geht man von einer assoziativen Algebra $\mathfrak{A}$ aus, so kann man durch

$$[u, v] = uv - vu$$

auf dem $\mathfrak{A}$ zugrundeliegenden Vektorraum eine neue Algebra $\mathfrak{A}^-$ definieren. $\mathfrak{A}^-$ ist stets eine Lie-Algebra. Für eine beliebige Algebra $\mathfrak{A}$ wird uns hier gelegentlich die Lie-Algebra

$$\mathfrak{L}^-(\mathfrak{A}) := (\mathfrak{L}(\mathfrak{A}))^- \text{ interessieren.}$$

In diesen Zusammenhang gehört auch der Begriff der Derivation: Eine lineare Transformation D der (beliebigen) Algebra $\mathfrak{A}$ in sich heißt eine Derivation, wenn

$$(0.9) \quad D(uv) = (Du)v + uDv$$

für alle $u, v \in \mathfrak{A}$ gilt. Offenbar ist dies äquivalent mit

$$(0.10) \quad L(Du) = [D, L(u)]$$

für alle $u \in \mathfrak{A}$.

Im Anschluß an [4] wird nun definiert: Ein Unterraum U einer Lie-Algebra $\mathfrak{L}$ über K ist ein Lie-Tripel-System in $\mathfrak{L}$, wenn mit u, v, w auch $(uv)w$ zu U gehört.

Eine Algebra $\mathcal{A}$ über K heißt potenz-assoziativ, wenn für alle $u \in \mathcal{A}$ und alle natürlichen Zahlen n, m die Gleichung

$$(0.11) \quad u^n u^m = u^{n+m}$$

erfüllt ist. Dies besagt genau, daß der in (0.7) definierte Vektorraum $K_1[u]$ eine kommutative und assoziative Unter algebra von $\mathcal{A}$ darstellt.

Die Algebra $\mathcal{A}$ heißt eine Jordan-Algebra, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(JA.1) $\mathcal{A}$ ist kommutativ, d.h. für alle $u, v \in \mathcal{A}$ gilt

$$uv = vu.$$

(JA.2) Die Gleichung

$$u(u^2v) = u^2(uv)$$

besteht identisch in $uv \in \mathcal{A}$. Diese definierenden Eigenschaften lassen sich offenbar mit der rechts- und linksregulären Darstellung in

$$(JA.1)^* \quad L(u) = R(u),$$

$$(JA.2)^* \quad L(u)L(u^2) = L(u^2)L(u)$$

äquivalent umformen.

7. Im folgenden erweist es sich manchmal als nützlich, zu Beginn eines Paragraphen einige dafür verbindliche Voraussetzungen zu fixieren. Diese werden wir dann nur noch in den Sätzen, nicht jedoch in den Lemmata ihres Geltungsbereiches explizit wiederholen. Zum Schluß sei noch bemerkt, daß wir in Zukunft mit $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{N}$ die Menge der ganzen bzw. der natürlichen (d.h. positiven ganzen) Zahlen bezeichnen werden.

Die hier zusammengestellten Begriffe sind, wenn nicht ausdrücklich andere Quellen angegeben wurden, dem Buch [1] entnommen.

§ 1. Definition und einfache Folgerungen.

1. Es erweist sich im folgenden als nötig, den Fall auszu-schließen, daß der Grundkörper K aus den Elementen 0 und 1 allein besteht. Diese Voraussetzung gilt für alle Zukunft und wird nicht mehr wiederholt.

Um die logische Tragweite der folgenden Definition besser übersehen zu können, benötigen wir zunächst eine wichtige Identität in Jordan-Algebren. Da K nach Voraussetzung mindestens drei Elemente enthält, gehen Jordan-Algebren über K bei Grundkörper-Erweiterung in Jordan-Algebren über (vgl. [1], IV, Satz 1.3). Folglich ist auf (JA.2) das Polarisationsverfahren anwendbar; es erbringt bei einmaliger Wiederholung die Identität

$$(1.1) \quad u(v(wy)) + w(v(uy)) + ((uw)v)y = \\ = (uv)(wy) + (wu)(vy) + (vw)(uy)$$

und beweist, daß diese für eine beliebige Jordan-Algebra über K identisch in u,v,w,y gilt. (1.1) heißt die vollständig polarisierte Jordan-Identität und ist für Char K $\neq 3$ mit (JA.2) äquivalent. Mit ihr zeigt man leicht, daß jede Jordan-Algebra über K potenz-assoziativ ist (vgl. [1], IV, Satz 1.5). Faßt man sie als lineare Transformation in y auf, so wird

$$(1.1)^* \quad L(u)L(v)L(w) + L(w)L(v)L(u) + L((uw)v) = \\ = L(uv)L(w) + L(wu)L(v) + L(vw)L(u).$$

Daraus ergibt sich mit einer trivialen Rechnung

$$(1.2) \quad L((v,w,u)) = [[L(u), L(v)], L(w)].$$

Insbesondere bildet also $L(\mathfrak{A})$ ein Lie-Tripel-System in $\mathfrak{L}^-(C)$ (vgl. §0, 6.)

2. Wir wollen (1.2) zur charakteristischen Eigenschaft der Lie-Tripel-Algebren machen und definieren:

Definition 1.1. Die Algebra $\mathcal{A}$ heißt eine Lie-Tripel-Algebra über K genau dann, wenn gilt:

(LTA.1) $\mathcal{A}$ ist kommutativ: Für alle $u, v \in \mathcal{A}$ ist

$$uv = vu.$$

(LTA.2) $L((v, w, u)) = [L(u), L(v), L(w)]$

identisch in $u, v, w \in \mathcal{A}$.

Wendet man (LTA.2) auf ein $y \in \mathcal{A}$ an, so erhält man:

$$(1.3) \quad [(vw)u]y - [v(wu)]y = \\ = u(v(wy)) - v(u(wy)) - w(u(vy)) + w(v(uy)).$$

Das bedeutet genau

$$(1.4) \quad y(v, w, u) + w(v, y, u) = (v, wy, u),$$

und durch Gleichsetzen von y mit w geht (1.4) ber in

$$(1.5) \quad 2w(v, w, u) = (v, w^2, u).$$

Umgekehrt folgt (1.4) aus (1.5) für den Fall „Char K ungleich 2“,

indem man w in (1.5) durch $w + \lambda y$ ($\lambda \in K$) ersetzt und dann die

Koeffizienten von λ vergleicht. (1.4), daher auch (1.3) und

(LTA.2), ist symmetrisch in u, v und w, y . Faßt man (1.3) als lineare Transformation in v auf, so ergibt sich nach einer geeigneten Umbenennung:

$$(1.6) \quad L(u)L(v)L(w) + L(w)L(v)L(u) + L((uw)v) = \\ = L(u)L(vw) + L(w)L(uv) + L(v)L(wu).$$

Insgesamt ist damit gezeigt, daß eine kommutative Algebra über

K genau dann eine Lie-Tripel-Algebra darstellt, wenn eine der

Gleichungen (1.3), (1.4), (1.6) besteht. Dies gilt auch für

(1.5), wenn die Charakteristik von K ungleich 2 ist. Schließlich

entnehmen wir der Beziehung (1.2), daß jede Jordan-Algebra

eine Lie-Tripel-Algebra bildet.

3. Die Identitäten (LTA.1) und (1.3) sind linear in allen auftretenden Argumenten, daher gehen Lie-Tripel-Algebren bei Erweiterung des Grundkörpers in Lie-Tripel-Algebren über.

Nun sei $\mathcal{A}$ eine Lie-Tripel-Algebra über K , wir betrachten die Algebra $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + Ke$, die aus $\mathcal{A}$ durch Adjunktion eines Einselementes e entsteht. Wiederum aus Linearitätsgründen sind (LTA.1) und (1.3) in $\hat{\mathcal{A}}$ erfüllt, weil sie in $\mathcal{A}$ gelten. Somit ist eine aus einer Lie-Tripel-Algebra durch Adjunktion eines Einselementes entstehende Algebra eine Lie-Tripel-Algebra.

Nun sei $\mathcal{A}$ eine Lie-Tripel- und $\mathcal{B}$ eine beliebige Algebra über K , $W: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sei ein surjektiver Algebren-Homomorphismus. Da die Eigenschaft, Lie-Tripel-Algebra zu sein, durch (LTA.1) und (LTA.2), also durch Polynomidentitäten charakterisiert ist, erweist sich auch $\mathcal{B}$ als eine Lie-Tripel-Algebra. Daher sind die homomorphen Bilder einer Lie-Tripel-Algebra $\mathcal{A}$ Lie-Tripel-Algebren. Insbesondere ist für ein Ideal $\mathcal{I}$ von $\mathcal{A}$ die Faktor-Algebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ eine Lie-Tripel-Algebra. Das gleiche gilt offenbar auch für jede Unter algebra von $\mathcal{A}$. Wir beweisen nun

Lemma 1.1. $\mathcal{A}$ sei eine kommutative Algebra über K und habe ein Einselement e . $\mathcal{A}$ ist eine Lie-Tripel-Algebra dann und nur dann, wenn $L(\mathcal{A})$ ein Lie-Tripel-System in $\mathcal{L}^-(\mathcal{A})$ darstellt.

Beweis. Wir verweisen zunächst auf die Definition des Lie-Tripel-Systems in §0, 6.. Ist nun $\mathcal{A}$ eine Lie-Tripel-Algebra, so folgt das Gewünschte aus (LTA.2). Umgekehrt sei $L(\mathcal{A})$ ein Lie-Tripel-System in $\mathcal{L}^-(\mathcal{A})$. Zu $u, v, w \in \mathcal{A}$ existiert dann ein $x \in \mathcal{A}$ mit

$$L(x) = [[L(u), L(v)], L(w)] = L(u)L(v)L(w) - L(v)L(u)L(w) - L(w)L(u)L(v) + L(w)L(v)L(u).$$

Wendet man diese Identität auf e an, so entsteht:

$$x = u(vw) - v(uw) - w(uv) + w(vu) = (v, w, u),$$

und damit ist (LTA.2) verifiziert.

In §0, 6. hatten wir den Begriff der Derivation eingeführt.

Seine Bedeutung für Lie-Tripel-Algebren kennzeichnet

Lemma 1.2. Es sei $\mathfrak{A}$ eine kommutative Algebra über K , für $u, v \in \mathfrak{A}$ sei $D(u, v) := [L(u), L(v)]$. $\mathfrak{A}$ stellt eine Lie-Tripel-Algebra dar dann und nur dann, wenn $D(u, v)$ für alle $u, v \in \mathfrak{A}$ eine Derivation von $\mathfrak{A}$ ist.

Beweis. Sei $u, v \in \mathfrak{A}$ und $D := D(u, v)$. Für ein $w \in \mathfrak{A}$ erhält man:

$$L(Dw) = L(u(vw) - v(uw)) = L((v, w, u)),$$

$$[D, L(w)] = [[L(u), L(v)], L(w)],$$

und ein Vergleich mit (LTA.2) erbringt den Beweis des Lemmas.

4. Um Aussagen über den Zusammenhang zwischen potenz-assoziativen und Lie-Tripel-Algebren zu gewinnen, betrachten wir ein Element u einer Lie-Tripel-Algebra $\mathfrak{A}$ über K und eine natürliche Zahl $n \geq 3$. Wir setzen $v := u$ und $w := u^{n-2}$ in (1.6) und bekommen

$$(1.7) \quad L(u^n) = 2L(u)L(u^{n-1}) + L(u^{n-2})(L(u^2) - L^2(u)) - L^2(u)L(u^{n-2}).$$

Hieraus gewinnt man mit vollständiger Induktion, daß für jede natürliche Zahl n die lineare Transformation $L(u^n)$ der von $\{L(u), L(u^2)\}$ in $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ erzeugten Algebra angehört. Im folgenden wird (1.7) für den Spezialfall $n = 3$ eine besonders wichtige Rolle spielen, weshalb wir diesen gesondert notieren.

$$(1.7)^* \quad L(u^3) = 3L(u)L(u^2) - 2L^3(u).$$

Wir beweisen nun

Satz 1.1. $\mathfrak{A}$ sei eine Lie-Tripel-Algebra über dem Körper K , dann gilt:

(a) Ist $u \in \mathfrak{A}$ mit $(u^2)^2 = u^4$, so wird auch $u^n u^m = u^{n+m}$ für alle natürlichen Zahlen n, m .

(b) Ist $\text{Char } K \neq 2$, und hat K mindestens vier Elemente, so ist $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra dann und nur dann, wenn

$(u^2)^2 = u^4$ für alle $u \in \mathfrak{A}$ gilt. Die potenz-assoziativen Lie - Tripel-Algebren sind also bereits Jordan-Algebren.

Beweis. (a) Wir beweisen zunächst $u^2 u^m = u^{m+2}$ mit Induktion nach m . Die Induktionsanfänge $m = 1, 2$ sind trivial nach Definition bzw. Voraussetzung. Nun sei $u^2 u^{m'} = u^{m'+2}$ für alle $m' \in \mathbb{N}$, $2 \leq m' \leq m$. Daraus und aus (1.7) ($m+1 \geq 3$) folgt dann

$$u^{m+1} u^2 = 2u(u^m u^2) + u^{m-1}(u^2)^2 - u^{m-1} u^4 - u(u(u^{m-1} u^2)) = u^{m+3},$$

womit die Induktion beendet ist. Nun zeigen wir $u^n u^m = u^{n+m}$ bei festem $m \in \mathbb{N}$ mit Induktion nach n . Nach dem schon bewiesenen sind die Fälle $n = 1, 2$ trivial, und ist die Behauptung für $2 \leq n' \leq n$ richtig, dann ist $n+1 \geq 3$, und (1.7) erbringt ähnlich wie oben: $u^{n+1} u^m = u^{n+1+m}$.

(b) Es sei $(u^2)^2 = u^4$ für alle $u \in \mathfrak{A}$. Bei beliebigem $\lambda \in K$, setze man diese Identität an für $u + \lambda v$ ($u, v \in \mathfrak{A}$) und vergleiche die Koeffizienten von λ ; das ist legitim, da K nach Voraussetzung mindestens vier Elemente enthält. Daraus ergibt sich

$$u^3 v = 4u^2(uv) - u(u^2 v) - 2u(u(uv))$$

identisch in u und v . Also:

$$L(u^3) = 4L(u^2)L(u) - L(u)L(u^2) - 2L^3(u).$$

Vergleicht man dies mit (1.7)* und beachtet $\text{Char } K \neq 2$, so wird

$$L(u)L(u^2) = L(u^2)L(u),$$

d.h. $\mathfrak{A}$ ist eine Jordan-Algebra. Die Umkehrung in (b) ist trivial.

§ 2. Die Peirce-Zerlegung.

1. Für die Dauer dieses Paragraphen sei $\mathfrak{A}$ eine Lie-Tripel-Algebra über dem Körper K einer Charakteristik ungleich 2. Betrachtet man ein Idempotent, d.h. ein Element $c \in \mathfrak{A}$ mit $0 \neq c = c^2$, so verwandelt sich die Beziehung (1.7)* in

$$(2.1) \quad 2L^3(c) - 3L^2(c) + L(c) = 0.$$

Daher ist das Minimalpolynom der von Null verschiedenen linearen Transformation $L(c)$ ein Teiler von $\tau(\tau - \frac{1}{2})(\tau - 1)$, zerfällt also über K in lauter verschiedene Linearfaktoren. Nach Sätzen der linearen Algebra gehören dann die Eigenwerte von $L(c)$ der Menge $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ an, und $\mathfrak{A}$ ist die direkte Vektorraumsumme der zugehörigen Eigenräume. Setzt man für $\lambda \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$:

$$(2.2) \quad \mathfrak{A}_\lambda(c) := \{u; u \in \mathfrak{A}, cu = \lambda u\},$$

so gilt $\mathfrak{A}_\lambda(c) \neq 0$ genau dann, wenn λ Eigenwert von $L(c)$ ist, und in diesem Falle stellt $\mathfrak{A}_\lambda(c)$ den Eigenraum von $L(c)$ zum Eigenwert λ dar. Über den Zusammenhang zwischen der Multiplikation von $\mathfrak{A}$ und den in (2.2) definierten Vektorräumen beweisen wir den

Satz 2.1. (Peirce-Zerlegung nach einem Idempotent.)

Es sei $\mathfrak{A}$ eine Lie-Tripel-Algebra über dem Körper K einer Charakteristik ungleich 2 und c ein Idempotent in $\mathfrak{A}$. Dann gilt

$$(2.3) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1(c) + \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(c) + \mathfrak{A}_0(c).$$

Für ein $u \in \mathfrak{A}$ sei

$$(2.4) \quad u_1(c) := 2c(cu) - cu, \quad u_{\frac{1}{2}}(c) := 4(cu - c(cu)), \\ u_0(c) := u - 3cu + 2c(cu).$$

Dann ist trivialerweise $u = u_1(c) + u_{\frac{1}{2}}(c) + u_0(c)$, außerdem aber

$u_\lambda(c) \in \mathfrak{A}_\lambda := \mathfrak{A}_\lambda(c)$ für $\lambda \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Schließlich erhält man mit $\lambda \in \{0, 1\}$:

$$(2.5) \quad \alpha_\lambda \alpha_\lambda \subset \alpha_\lambda, \quad \alpha_{\frac{1}{2}} \alpha_\lambda \subset \alpha_{\frac{1}{2}} \\ \alpha_0 \alpha_1 = 0, \quad \alpha_{\frac{1}{2}} \alpha_{\frac{1}{2}} \subset \alpha_0 + \alpha_1.$$

Beweis. Die Gültigkeit von (2.3) wurde gerade bewiesen. Die im Zusammenhang mit (2.4) erscheinende Behauptung ergibt sich durch explizites Nachrechnen unter Berücksichtigung von (2.1). Somit gilt es nur noch, (2.5) zu beweisen. Dazu seien

$\lambda, \mu \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $u \in \alpha_\lambda$, $v \in \alpha_\mu$. In (1.3) ersetze man dann y und u durch c sowie w durch u . Man bekommt

$$(2.6) \quad c(c(uv)) - 2\lambda c(uv) + (\lambda^2 + \mu^2 - \mu)uv = 0.$$

Ersetzt man in (1.3) andererseits wie oben y und u durch c , aber jetzt w durch v und v durch u , so entsteht

$$(2.6)^* \quad c(c(uv)) - 2\mu c(uv) + (\mu^2 + \lambda^2 - \lambda)uv = 0.$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen gelangt man zu

$$(\lambda - \mu)c(uv) = \frac{1}{2}(\lambda - \mu)uv \text{ oder}$$

$$(2.7) \quad uv \in \alpha_{\frac{1}{2}} \quad (\lambda \neq \mu).$$

Daraus folgt zunächst $\alpha_{\frac{1}{2}} \alpha_\lambda \subset \alpha_{\frac{1}{2}}$ für $\lambda = 0, 1$. Wenn aber $\lambda = 0$ und $\mu = 1$ gilt, so gewinnt man aus (2.6) und (2.7):

$$0 = c(c(uv)) = \frac{1}{4}uv,$$

d.h. $\alpha_0 \alpha_1 = 0$. Jetzt bleibt nur noch der Fall $\lambda = \mu$ übrig, wofür (2.6) die Umschreibung

$$(2.8) \quad c(c(uv) - \lambda uv) = \lambda(c(uv) - \lambda uv) + (\lambda - \lambda^2)uv$$

gestattet. Wir betrachten die folgenden Fälle:

1.) $\lambda = 0, 1$: Dann beweist (2.8), daß $c(uv) - \lambda uv$ zu α_λ gehört. Mit

$$c(uv) - \lambda uv = (1 - \lambda)(uv)_1(c) + (\frac{1}{2} - \lambda)(uv)_{\frac{1}{2}}(c) - \\ - \lambda(uv)_0(c)$$

bedeutet dies, daß $(uv)_{\frac{1}{2}}(c)$ und $(uv)_{1-\lambda}(c)$ verschwindet. Mit - hin wird $uv = (uv)_\lambda(c)$, also $\alpha_\lambda \alpha_\lambda \subset \alpha_\lambda$.

2.) $\lambda = \frac{1}{2}$: Aus (2.6) mit $\mu = \frac{1}{2}$ ersieht man, daß

$$c(uv) = (uv)_1(c) + \frac{1}{3}(uv)_{\frac{1}{2}}(c)$$

zu $\mathcal{A}_1$ gehört. Also hat man $(uv)_{\frac{1}{2}}(c) = 0$, und es folgt:

$\mathcal{A}_{\frac{1}{2}} \mathcal{A}_{\frac{1}{2}} \subset \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$. Damit ist der Beweis beendet.

2. Die anschließend erscheinenden Begriffe gehen auf [1] zurück. Zwei Idempotente c, c' von $\mathcal{A}$ wollen wir orthogonal nennen, wenn ihr Produkt verschwindet. Analog heißt eine Menge $\{c_1, \dots, c_r\} \subset \mathcal{A}$ ein Orthogonalsystem von Idempotenten in $\mathcal{A}$, wenn

$$c_i c_j = \delta_{ij} c_i, \quad c_i \neq 0$$

für $i, j = 1, \dots, r$ gilt. Es ist klar, daß ein solches System stets linear unabhängig über K ist. Im Anschluß an Satz 2.1. ergibt sich zu diesem Begriff

Lemma 2.1. Es sei c ein Idempotent von $\mathcal{A}$ und

$u \in \mathcal{A}_0(c) + \mathcal{A}_1(c)$. Dann gilt

$$(2.9) \quad L(u)L(c) = L(c)L(u).$$

Insbesondere für ein zu c orthogonales Idempotent c' ist daher $L(c)$ mit $L(c')$ vertauschbar.

Beweis. Für $v \in \mathcal{A}$ sei $v_\lambda := v_\lambda(c)$ ($\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1$). Dann bekommt man mit Satz 2.1.:

$$\begin{aligned} c(uv) &= c(u_1 v_1 + u_0 v_0 + (u_0 + u_1) v_{\frac{1}{2}}) = \\ &= u_1 v_1 + \frac{1}{2}(u_0 + u_1) v_{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$u(cv) = (u_0 + u_1)(v_1 + \frac{1}{2} v_{\frac{1}{2}}) = u_1 v_1 + \frac{1}{2}(u_0 + u_1) v_{\frac{1}{2}},$$

und ein Vergleich bringt (2.9). Ist nun c' ein zu c orthogonales Idempotent, so gilt $c' \in \mathcal{A}_0(c)$, und (2.9) beweist die Vertauschbarkeit von $L(c)$ mit $L(c')$.

3. Wie üblich nennen wir ein Idempotent $c \in \mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ primitiv, wenn c nicht darstellbar ist als Summe zweier zueinander orthogonalen Idempotenten in $\mathcal{A}$. Ist dies der Fall, so betrachte man die Algebra $\mathcal{A}_1(c)$ (vgl. (2.5)), welche offenbar das Einselement c hat. Gibt es ein davon verschiedenes Idempotent c' in $\mathcal{A}_1(c)$, so wird

$$(2.10) \quad c = c' + c''$$

mit $c'' := c - c'$. Man bestätigt leicht, daß c'' ein zu $\mathcal{A}_1(c)$ gehöriges Idempotent und zu c' orthogonal ist. In Verbindung mit (2.10) bedeutet dies einen Widerspruch zur Primitivität von c . Somit ist c das einzige Idempotent von $\mathcal{A}_1(c)$. Umgekehrt sei dies der Fall. Wäre c nicht primitiv, so würde es einer Darstellung vom Typ (2.10) mit orthogonalen Idempotenten c', c'' genügen. Dann wäre aber $cc' = c'^2 + c'c'' = c'$, also $c' \in \mathcal{A}_1(c)$ und $c' \neq c$. Aus diesem Widerspruch folgt insgesamt: Ein Idempotent $c \in \mathcal{A}$ ist genau dann in $\mathcal{A}$ primitiv, wenn $\mathcal{A}_1(c)$ kein von c verschiedenes Idempotent besitzt.

Schließlich wollen wir ein Idempotent $c \in \mathcal{A}$ absolut primitiv nennen, wenn c primitiv ist in jeder aus $\mathcal{A}$ durch Grundkörper-Erweiterung entstehenden Algebra. Damit beweisen wir Lemma 2.2. c sei ein Idempotent in $\mathcal{A}$. Dann gilt:

- (a) c genügt einer Darstellung als orthogonale Summe primitiver Idempotenter in $\mathcal{A}$.
- (b) Es gibt eine Grundkörper-Erweiterung $\tilde{\mathcal{A}}$ von $\mathcal{A}$, so daß c einer Darstellung als orthogonale Summe absolut primitiver Idempotenter in $\tilde{\mathcal{A}}$ genügt.

Beweis. Zu einer Körpererweiterung L von K fassen wir das Maximum $r(L)$ aller natürlichen Zahlen s ins Auge, zu denen ein Orthogonalsystem $\{c_1, \dots, c_s\}$ von Idempotenten in $\mathcal{A}_L$ mit $c = \sum_{i=1}^s c_i$ existiert. Wegen der endlichen Dimension von $\mathcal{A}_L$ ist $r(L)$ wohldefiniert und stets kleiner oder gleich $n = \dim_L \mathcal{A}_L = \dim_K \mathcal{A}$. Für einen Oberkörper L' von L gilt offenbar $r(L) \leq r(L')$. Wir behaupten nun:

Ist L' eine Erweiterung von L mit $r(L) = r(L') =: r$, und ist $\{c_1, \dots, c_r\}$ ein Orthogonalsystem Idempotenter in $\mathcal{A}_L$ mit

$c = \sum_{i=1}^r c_i$, dann sind die c_i in $\mathcal{A}_L$ primitiv

Wäre etwa c_1 dort nicht primitiv, so würde (2.10) mit orthogonalen Idempotenten $c', c'' \in \mathcal{A}_L$ gelten. Aus Orthogonalitätsgründen ist $c_i \in \mathcal{A}_{L_0}(c_1)$ für $i \geq 2$, dagegen wäre c', c'' in $\mathcal{A}_{L_1}(c_1)$ enthalten, und mit (2.5) käme

$$c'c_i = c''c_i = 0 \quad (i \geq 2).$$

Somit wäre $\{c', c'', c_2, \dots, c_r\}$ ein Orthogonalsystem von Idempotenten in $\mathcal{A}_L$ mit $c = c' + c'' + \sum_{i=2}^r c_i$, und das widerspricht der Definition von $r(L')$. Daher ist c_1 primitiv. Da man entsprechend für die Indizes $i = 2, \dots, r$ schließen kann, folgt die Behauptung. Diese impliziert (a), wenn $L' := L := K$ gesetzt, und (b), wenn eine Erweiterung $\tilde{K}$ von K mit

$$r(\tilde{K}) = \max \{r(L); L \text{ Erweiterung von } K\}$$

gewählt wird.

4. Nun habe $\mathcal{A}$ ein Einselement e . Ein Orthogonalsystem $\{c_1, \dots, c_r\}$ von Idempotenten in $\mathcal{A}$ nennen wir vollständig, wenn $\sum_{i=1}^r c_i = e$ gilt. Unter dem Primitivgrad von $\mathcal{A}$, den wir gelegentlich mit $\text{pr Gr } \mathcal{A}$ abkürzen werden, verstehen wir die Maximalzahl von Elementen, die ein vollständiges Orthogonalsystem von Idempotenten in $\mathcal{A}$ haben kann. Der Grad von $\mathcal{A}$, abgekürzt durch $\text{Gr } \mathcal{A}$, ist per definitionem die Maximalzahl der Elemente, die ein vollständiges Orthogonalsystem von Idempotenten in einer beliebigen Erweiterung von $\mathcal{A}$ haben kann. Die Algebra $\mathcal{A}$ heißt primär, wenn sie den Primitivgrad 1 hat, also e ihr einziges Idempotent ist.

Besitzt $\mathcal{A}$ kein Einselement, so fasse man die Algebra $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + Ke$ ins Auge, die aus $\mathcal{A}$ durch Adjunktion des Eins-elementes e hervorgeht. Dann setzen wir:

$$(2.11) \quad \text{Pr Gr } \mathcal{A} := \text{Pr Gr } \hat{\mathcal{A}} - 1,$$

$$(2.11)^* \quad \text{Gr } \mathcal{A} := \text{Gr } \hat{\mathcal{A}} - 1.$$

Es ist nicht schwierig, zu erkennen, daß sich diese Definitionen in richtige Gleichungen transformieren, wenn $\mathcal{A}$ ein Einselement besitzt. Diese Einsicht beruht im wesentlichen auf dem folgenden Hilfssatz, den man zum Teil in [2] vorfindet.

Lemma 2.3. Die Algebra $\hat{\mathcal{A}}$ gehe aus $\mathcal{A}$ durch Adjunktion eines Einselementes e hervor, und es sei c ein Idempotent in $\hat{\mathcal{A}}$. Dann ist entweder c ein Idempotent in $\mathcal{A}$ oder $c = e$ oder es gibt ein Idempotent c' in $\mathcal{A}$ mit $c = e - c'$.

Beweis. Es sei $c = d + \alpha e$ ($d \in \mathcal{A}$, $\alpha \in K$) kein Idempotent in $\mathcal{A}$ und ungleich e . Dann gilt $d \neq 0$, $\alpha \neq 0$. Die Idempotenz von c bedeutet genau

$$d + \alpha e = d^2 + 2\alpha d + \alpha^2 e.$$

Daraus folgt $\alpha = 1$ und danach $d^2 = -d$. Somit wird $c' := -d \in \mathcal{A}$ idempotent und $c = e - c'$.

Wir bemerken noch zu den Ergebnissen von §. 2., daß ein Idempotent c in $\mathcal{A}$ primitiv ist dann und nur dann, wenn die Algebra $\mathcal{A}_1(c)$ primär ist.

§. 5. Zum Schluß bringen wir noch ein sehr wichtiges Ergebnis, das für Jordan-Algebren bekannt ist und sich nach den hier entwickelten Vorbereitungen ebenso wie dort beweisen läßt (vgl. [1]). Wir führen es daher ohne Beweis an:

Satz 2.2. (Peirce-Zerlegung nach einem vollständigen Orthogonalsystem von Idempotenten) Es sei $\mathcal{A}$ eine Lie-Tripel-Algebra mit Einselement e über einem Körper K der Charakteristik ungleich 2. $\{c_1, \dots, c_r\}$ sei ein vollständiges Orthogonalsystem von Idempotenten in $\mathcal{A}$. Für $i, k = 1, \dots, r$ werde gesetzt:

$$(2.13.) \quad \begin{aligned} u_{ii} &:= 2c_i(c_i u) - c_i u, \\ u_{ik} &:= 4c_i(c_k u) = u_{ki} \quad (i \neq k), \end{aligned}$$

$$(2.13)^* \quad \mathcal{A}_{ik} := \{u_{ik}; u \in \mathcal{A}\}.$$

Dann gilt (i, j, k, l = 1, ..., r):

(a) Für $u \in \mathcal{A}$ ist

$$u = \sum_{i=1}^r u_{ik}.$$

(b) Die $\mathcal{A}_{ik}$ sind Unterräume von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^r \mathcal{A}_{ik}$, und diese Summe ist als Summe von Vektorräumen direkt.

(c) $\mathcal{A}_1(c_i) = \mathcal{A}_{ii}$, $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}(c_i) = \sum_{k \neq i} \mathcal{A}_{ki}$, $\mathcal{A}_0(c_i) = \sum_{j, k \neq i} \mathcal{A}_{jk}$.

(d) Für $i \neq k$ ist

$$\mathcal{A}_{ik} = \mathcal{A}_{ki} = \mathcal{A}_{\frac{1}{2}}(c_i) \cap \mathcal{A}_{\frac{1}{2}}(c_k).$$

(e) Für $i \neq k$ ist $c_i + c_k$ ein Idempotent in $\mathcal{A}$ mit

$$\mathcal{A}_1(c_i + c_k) = \mathcal{A}_{ii} + \mathcal{A}_{ik} + \mathcal{A}_{kk}.$$

(f) Für paarweise verschiedene i, j, k, l gilt:

$$\mathcal{A}_{ii} \mathcal{A}_{ij} \subset \mathcal{A}_{ij}, \quad \mathcal{A}_{ij} \mathcal{A}_{jk} \subset \mathcal{A}_{ik}, \quad \mathcal{A}_{ij} \mathcal{A}_{kl} = 0,$$

$$\mathcal{A}_{ii} \mathcal{A}_{jk} = 0, \quad \mathcal{A}_{ii} \mathcal{A}_{jj} = 0, \quad \mathcal{A}_{ii}^2 \subset \mathcal{A}_{ii},$$

$$\mathcal{A}_{ij}^2 \subset \mathcal{A}_{ii} + \mathcal{A}_{jj}.$$

§ 3. Hilfssätze zum Begriff des Minimalpolynoms.

1. Bekanntlich ist bei Untersuchungen in potenz-assoziativen und hier insbesondere in Jordan-Algebren der Begriff des Minimalpolynoms eines Elementes oft von großem Nutzen (vgl. hierzu [1]). In diesem Paragraphen werden wir zeigen, daß sich einige der in diesem Zusammenhang bewiesenen Ergebnisse ohne Einschränkung in beliebigen Algebren herleiten lassen. Daraus ergeben sich später für die, wie wir sehen werden, im allgemeinen nicht potenz-assoziativen Lie-Tripel-Algebren wichtige Konsequenzen.

Im vorliegenden Abschnitt spielt, wie man es der potenz-assoziativen Vorlage gemäß auch erwarten darf, der Begriff des generischen Elementes eine fundamentale Rolle. Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra über K und $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von $\mathcal{A}$. Sind dann $\tau_1, \dots, \tau_n$ über K algebraisch unabhängige Elemente (beispielsweise unabhängige Unbestimmte über K), so heißt

$$x := \tau_1 b_1 + \dots + \tau_n b_n$$

ein generisches Element der Algebra $\mathcal{A}$ oder auch generisch über K . Man zeigt leicht, daß diese Definition von der Basiswahl unabhängig ist und der Körper $\tilde{K} := K(\tau_1, \dots, \tau_n)$ nur von x abhängt. Demgemäß können wir $\tilde{K}$ als die zu x gehörige (Körper-) Erweiterung von K bezeichnen. Evident ist x Element der Algebra $\tilde{\mathcal{A}}$.

2. Nun sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Einselement e über K und $u \in \mathcal{A}$. Wir verweisen auf die Definition von u^m ($m \geq 0$, ganz) in §0, 4. und setzen für $f(\tau) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \tau^j \in K[\tau]$

$$(3.1) \quad f(u) := f(\tau) \Big|_{\tau \rightarrow u} = \sum_{j=0}^k \alpha_j u^j.$$

Offenbar ist $K[u] = \{f(u); f(\tau) \in K[\tau]\}$. Man bestätigt nun leicht die folgenden Rechenregeln: Für $\lambda, \mu \in K$ und $f(\tau), g(\tau) \in K[\tau]$ wird

$$(3.2) \quad (\lambda f(\tau) + \mu g(\tau)) \Big|_{\tau \rightarrow u} = \lambda f(u) + \mu g(u).$$

Gilt überdies $\text{Gr } g(\tau) \leq 1$, so wird

$$(3.3) \quad (g(\tau)f(\tau))|_{\tau \rightarrow u} = g(u)f(u).$$

Da $n := \dim_K \mathcal{A}$ endlich ist, sind die Elemente $e, u, \dots, u^n$ mit Sicherheit linear abhängig über K . Folglich existiert ein normiertes Polynom $f(\tau) \in K[\tau]$ mit $f(u) = 0$. Unter allen normierten Polynomen aus $K[\tau]$ mit dieser Eigenschaft sei $f_u(\tau)$ ein solches von kleinstem Grad. Diese Bedingungen bestimmen $f_u(\tau)$ eindeutig; denn ist $g(\tau) \in K[\tau]$ normiert, $g(u) = 0$ und $\text{Gr } g(\tau) = \text{Gr } f_u(\tau)$, dann hat die Differenz $f_u(\tau) - g(\tau)$ einen kleineren Grad und erbringt gemäß (3.2) beim Einsetzen von u für τ den Wert Null. Das bedeutet mit $f_u(\tau) - g(\tau) = 0$ die behauptete Eindeutigkeit von $f_u(\tau)$.

wir nennen $f_u(\tau)$ das Minimalpolynom von u in $\mathcal{A}$. Wir lassen im folgenden den Zusatz „in $\mathcal{A}$ “ stets fort, wenn aus dem Zusammenhang unzweifelhaft hervorgeht, in welcher Algebra das Minimalpolynom zu bilden ist. Nach Konstruktion ist klar, daß immer $\text{Gr } f_u(\tau) \leq \dim_K \mathcal{A}$ gilt. Mit den üblichen Methoden läßt sich auch hier beweisen, daß das Minimalpolynom eines Elementes $u \in \mathcal{A}$ bei einer Grundkörper-Erweiterung ungeändert bleibt.

Es sei x ein generisches Element von $\mathcal{A}$ mit der zugehörigen Körpererweiterung $\tilde{K}$ von K . x liegt dann in der Algebra $\tilde{\mathcal{A}}$, die Koeffizienten des Minimalpolynoms von x , welches wir entgegen der obigen Konvention nicht mit $f_x(\tau)$, sondern mit $f(\tau; x)$ bezeichnen wollen, sind also skalare rationale Funktionen von x .

Nun gilt

Lemma 3.1. Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra über K mit Einselement e , $u \in \mathcal{A}$ und $g(\tau) \in K[\tau]$, so gilt $g(u) = 0$ dann und nur dann, wenn $f_u(\tau)$ ein Teiler von $g(\tau)$ ist.

Beweis. (a) Zunächst sei $f_u(\tau)$ ein Teiler von $g(\tau)$, also

$$g(\tau) = h(\tau)f_u(\tau), \quad h(\tau) \in K[\tau].$$

Wir können offenbar $h(\tau) \neq 0$ annehmen und zeigen dann die Behauptung $g(u) = 0$ mit vollständiger Induktion nach $r := \text{Gr } h(\tau)$. Der Induktionsbeginn $r = 0$ ist trivial; sei nun das Gewünschte bis r bewiesen und $\text{Gr } h(\tau) = r + 1$ ($r \geq 0$). Dann existiert ein α aus dem algebraischen Abschluß $\bar{K}$ von K mit $h(\alpha) = 0$, also

$$h(\tau) = (\tau - \alpha)h_1(\tau).$$

Dabei ist $h_1(\tau) \in \bar{K}[\tau]$ und $\text{Gr } h_1(\tau) = r$. Jetzt wenden wir die Induktionsannahme auf $\bar{\alpha}$ an Stelle von α , $g_1(\tau) := h_1(\tau)f_u(\tau)$ an und beachten dabei, daß $f_u(\tau)$ auch das Minimalpolynom von u in $\bar{\alpha}$ ist. Schließlich beziehen wir uns noch auf die Gleichung (3.3) und erhalten:

$$\begin{aligned} g(u) &= ((\tau - \alpha)h_1(\tau)f_u(\tau)) \Big|_{\tau \rightarrow u} \\ &= (u - \alpha e)(h_1(\tau)f_u(\tau)) \Big|_{\tau \rightarrow u} = 0. \end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil des Lemmas bewiesen.

(b) Nun sei $g(u) = 0$. Wir führen Division mit Rest aus und bekommen:

$$g(\tau) = h(\tau)f_u(\tau) + r(\tau)$$

mit Polynomen $h(\tau), r(\tau) \in K[\tau]$, $\text{Gr } r(\tau) < \text{Gr } f_u(\tau)$. In diese Beziehung tragen wir u für τ ein, berücksichtigen (3.2) und die schon behandelte Richtung des Lemmas. Es ergibt sich:

$$0 = g(u) = (h(\tau)f_u(\tau)) \Big|_{\tau \rightarrow u} + r(u) = r(u).$$

Die erwähnte Gradrelation erbringt daher $r(\tau) = 0$ oder $f_u(\tau)/g(\tau)$.

Lemma 3.2, α sei eine Algebra über K mit Einselement e . Dann gilt:

(a) Für $u \in \alpha$ ist

$$f_u(\tau) = |\tau \text{Id} - L_0(u)|,$$

wenn $L_0(u)$ die Restriktion von $L(u)$ auf $K[u]$ bezeichnet.

(b) x sei ein generisches Element von α , dann ist $f(\tau; x)$ ein

Polynom in τ und x , und für jedes Element u einer beliebigen Körpererweiterung von $\mathcal{A}$ gilt $f_u(\tau)/f(\tau;u)$.

Auf einen Beweis dieses Lemmas wollen wir hier verzichten. Nach den bisher entwickelten Vorbereitungen können wir die in [1] (II, §2) für den potenz-assoziativen Fall geführte Herleitung wörtlich übernehmen.

3. Es sei x ein generisches Element der Algebra $\mathcal{A}$ mit Einselement e über K . Das Minimalpolynom $f(\tau;x)$ genügt einer Entwicklung

$$(3.4) \quad f(\tau;x) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \varphi_j(x) \tau^{m-j},$$

wo $\varphi_j(x)$ gemäß Lemma 3.2. ein skalares Polynom von x ist ($0 \leq j \leq m$).

Nun sei e eine von τ algebraisch unabhängige Unbestimmte über der zu x gehörigen Erweiterung $\tilde{K}$ von K . Einerseits folgt aus (3.4)

$$f(e\tau;ex) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \varphi_j(ex) e^{m-j} \tau^{m-j},$$

andererseits erbringt Lemma 3.2. (a) für x an Stelle von u :

$$f(e\tau;ex) = |e\tau \text{Id} - e L_0(x)| = e^m f(\tau;x),$$

und ein Vergleich der beiden Gleichungen zeigt, daß die $\varphi_j(x)$ in x homogene Polynome vom Grade j sind. Wie im Falle potenz-assoziativer Algebren definieren wir nun die Hauptspur („HS“) und die Hauptnorm („HN“) der Algebra $\mathcal{A}$ durch

$$(3.5) \quad \text{HS}(x) := \varphi_1(x), \quad \text{HN}(x) := \varphi_m(x) = (-1)^m f(0;x).$$

Nach dem Gesagten ist $\text{HS}(x)$ eine Linearform und $\text{HN}(x)$ homogen vom Grade m in x . Lemma 3.2. (a) für x an Stelle von u entnimmt man die Beziehungen

$$(3.6) \quad \text{HS}(x) = \text{Sp } L_0(x), \quad \text{HN}(x) = |L_0(x)|.$$

4. Wir wollen die hier entwickelten Gedankengänge auch für Algebren ohne Einselement nutzbar machen. Wie bisher werden wir uns auch dabei eng an die Vorlage [1] halten. Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra über K ohne Einselement. Dann ist der in (3.1) erklärte Einsetzungsprozess nur für Polynome $f(\tau) \in K[\tau]$ mit $f(0) = 0$ er-

laubt. Für $u \in \mathcal{A}$ bezeichne nun $\hat{f}_u(\tau)$ das Minimalpolynom von u in $\hat{\mathcal{A}}$.

Da $\mathcal{A}$ kein Einselement besitzt, ist dies auch richtig für jede Körpererweiterung $\tilde{\mathcal{A}}$ von $\mathcal{A}$ ([1]). Es ist klar, daß man $\tilde{\mathcal{A}}$ mit $\hat{\mathcal{A}}$ identifizieren kann. Mit $\hat{f}(\tau; \hat{x})$ bezeichnen wir nun das Minimalpolynom des generischen Elementes $\hat{x}$ von $\hat{\mathcal{A}}$. Ebenso wie in [1] (III, Lemma 8.1.) zeigt man jetzt

Lemma 3.4. $\mathcal{A}$ sei eine Algebra über K ohne Einselement.

(a) Für ein $u \in \mathcal{A}$ ist $\hat{f}_u(\tau)$ das normierte Polynom kleinsten Grades aus $K[\tau]$, das die Wurzel Null hat und beim Einsetzen von u für τ den Wert Null ergibt.

(b) x sei ein generisches Element von $\mathcal{A}$ mit der zugehörigen Körpererweiterung $\tilde{K}$ von K . Ist dann e eine Unbestimmte über $\tilde{K}$, so ist $\hat{x} := e + x$ ein generisches Element von $\hat{\mathcal{A}}$, und es gilt:

$$\hat{f}(\tau; \hat{x}) = f_x(\tau - e).$$

Die Hauptnorm (Hauptspur) von $\hat{\mathcal{A}}$ bezeichnen wir mit $\hat{HN}(\hat{x})$ ($\hat{HS}(\hat{x})$). Spezialisiert man hier $\hat{x}$ zu x , so erhält man in

$$(2.8) \quad HN(x) := \hat{HN}(x), \quad HS(x) := \hat{HS}(x)$$

ein homogenes Polynom bzw. eine Linearform in x , die wir als die Hauptnorm bzw. Hauptspur von $\mathcal{A}$ bezeichnen.

5. Wir wollen zum Schluß noch die Minimalpolynome für einen wichtigen Elementtyp angeben, wenn $\mathcal{A}$ eine beliebige Algebra über dem Körper K ist. Nach Lemma 3.1. ist $f_u(\tau)$ bzw. $\hat{f}_u(\tau)$ für nilpotentes $u \in \mathcal{A}$ eine Potenz von τ .

§ 4. Assoziative Bilinearformen.

1. Der Begriff der assoziativen Bilinearform auf einer Algebra $\mathfrak{A}$ wird in [1] entwickelt. Soweit die damit zusammenhängenden Definitionen für das Studium der Lie-Tripel-Algebren relevant sind, wollen wir sie hier kurz wiedergeben.

Wir betrachten im folgenden Linear- und Bilinearformen auf einer Algebra $\mathfrak{A}$ über dem Körper K . Wenn nicht ausdrücklich anders verfügt wird, sind für diese stets Werte in einem beliebigen Erweiterungskörper von K zugelassen. Wir wollen uns hier auf die Untersuchung symmetrischer Bilinearformen beschränken und verwenden daher die Begriffe „Bilinearform“ und „symmetrische Bilinearform“ synonym.

Definition 4.1. (a) Eine Bilinearform σ auf $\mathfrak{A}$ heißt assoziativ genau dann, wenn $\sigma(uv, w) = \sigma(u, vw)$ gilt für alle $u, v, w \in \mathfrak{A}$.

(b) Eine Linearform λ auf $\mathfrak{A}$ heißt assoziativ genau dann, wenn $\lambda(uv) = \lambda(vu)$ und $\lambda((uv)w) = \lambda(u(vw))$ für alle $u, v, w \in \mathfrak{A}$ gilt. Dies bedeutet offenbar genau, daß vermöge $\sigma_\lambda(u, v) := \lambda(uv)$ eine assoziative (symmetrische) Bilinearform σ_λ auf $\mathfrak{A}$ erklärt wird.

Definition 4.2. (a) Es sei σ eine Bilinearform auf $\mathfrak{A}$; der Vektorraum

$$\text{Bk}_\sigma(\mathfrak{A}) := \{u; u \in \mathfrak{A}, \sigma(u, v) = 0 \text{ für alle } v \in \mathfrak{A}\}$$

heißt der Bilinearkern von σ (in $\mathfrak{A}$).

(b) Für eine Linearform λ auf $\mathfrak{A}$ nennen wir entsprechend

$$\text{Bk}_\lambda(\mathfrak{A}) := \{u; u \in \mathfrak{A}, \lambda(uv) = 0 \text{ für alle } v \in \mathfrak{A}\}$$

den Bilinearkern von λ (in $\mathfrak{A}$).

Bekanntlich stellt $\text{Bk}_\sigma(\mathfrak{A})$ bzw. $\text{Bk}_\lambda(\mathfrak{A})$ ein Ideal in $\mathfrak{A}$ dar für assoziatives σ bzw. λ .

2. Die Bedeutung der assoziativen Bilinearformen für Lie - Tripel-Algebren ersieht man aus dem folgenden

Satz 4.1. $\mathfrak{A}$ sei eine Lie-Tripel-Algebra über dem Körper K einer Charakteristik ungleich 3. Dann ist $\mathfrak{A}/\text{Bk}_{\sigma}(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{A}/\text{Bk}_{\lambda}(\mathfrak{A})$ eine Jordan-Algebra für jede assoziative Bilinearform σ und jede assoziative Linearform λ auf $\mathfrak{A}$.

Beweis. Definitionsgemäß braucht nur der die Bilinearformen betreffende Teil des Satzes bewiesen zu werden. Wegen (1.7)* wird für $u, v, w \in \mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned} \sigma(u(u^2v), w) &= \frac{2}{3}\sigma(u(u(uv)), w) + \frac{1}{3}\sigma(u^3v, w) = \\ &= \frac{2}{3}\sigma(u(u(uv)), w) + \frac{1}{3}\sigma(v, u^3w) = \\ &= \frac{2}{3}\sigma(u(u(uv)), w) + \sigma(v, u(u^2w)) - \frac{2}{3}\sigma(v, u(u(uw))) = \\ &= \frac{2}{3}\sigma(u(u(uv)), w) + \sigma(u^2(uv), w) - \frac{2}{3}\sigma(u(u(uv)), w) = \\ &= \sigma(u^2(uv), w). \end{aligned}$$

Daraus geht hervor, daß $u(u^2v) - u^2(uv) \in \text{Bk}_{\sigma}(\mathfrak{A})$ gilt für alle $u, v \in \mathfrak{A}$, und der Übergang zu den Restklassen modulo $\text{Bk}_{\sigma}(\mathfrak{A})$ beweist, daß $\mathfrak{A}/\text{Bk}_{\sigma}(\mathfrak{A})$ eine Jordan-Algebra ist.

Den wichtigsten Spezialfall dieses Satzes formulieren wir in dem

Korollar. $\mathfrak{A}$ sei eine Lie-Tripel-Algebra über dem Körper K einer Charakteristik ungleich 3; σ sei eine assoziative Bilinearform auf $\mathfrak{A}$ mit $\text{Bk}_{\sigma}(\mathfrak{A}) = 0$. Dann ist $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra.

3. Im folgenden sollen assoziative Linearformen auf einer vorgegebenen Lie-Tripel-Algebra $\mathfrak{A}$ über dem Körper K explizit konstruiert werden. Wir beginnen mit der Spurform Sp von $\mathfrak{A}$, welche definiert ist durch die Gleichung

$$(4.1.) \quad \text{Sp}(u) := \text{Spur } L(u).$$

Ersichtlich hat diese Linearform Werte im Grundkörper K . Da die Spur eines Kommutators von linearen Transformationen stets verschwindet, ergibt sich aus (LTA.2) unmittelbar, daß die Spurform den Assoziatoren der Algebra $\mathcal{A}$ den Wert Null erteilt, also assoziativ ist.

Dasselbe Resultat wollen wir nun auch für die in §3, 3. definierte Hauptspur von $\mathcal{A}$ herleiten. Im wesentlichen benötigen wir dazu das folgende

Lemma 4.1. $\mathcal{A}$ sei eine Algebra über dem Körper K mit Einselement e , x sei ein generisches Element von $\mathcal{A}$, dessen Minimalpolynom $f(\tau; x)$ in der Gestalt (3.4) vorgelegt sei. Schließlich bezeichne D eine Derivation von $\mathcal{A}$. Dann gilt für $j = 1, \dots, m$:

$$(4.2) \quad \varphi_j(x + \tau Dx) \equiv \varphi_j(x) \pmod{\tau^2}$$

und insbesondere $HS(Dx) = 0$.

Für strikt potenz-assoziative Algebren wurde dieses Lemma in [11] bewiesen. Investiert man die Hilfssätze des Paragraphen 3, so kann man die Annahme der strikten Potenz-Assoziativität in dem Beweis jedoch entbehren und diesen daher für unsere Zwecke wörtlich übernehmen; das wollen wir jedoch nicht explizit ausführen.

Nun sei $\mathcal{A}$ eine Lie-Tripel-Algebra über k und habe zunächst ein Einselement e . In Lemma 1.2. hatten wir gesehen, daß für $u, v \in \mathcal{A}$ die lineare Transformation $D(u, v) := [L(u), L(v)]$ eine Derivation von $\mathcal{A}$ darstellt. Gemäß Lemma 4.1. ist also für ein generisches Element x von $\mathcal{A}$

$$HS(D(u, v)x) = HS(u(vx) - v(ux)) = 0,$$

die Hauptspur von $\mathcal{A}$ also eine assoziative Linearform. Besitzt $\mathcal{A}$ kein Einselement, so ist die Hauptspur von $\mathcal{A}$ die Restriktion der Hauptspur von $\hat{\mathcal{A}}$ auf $\mathcal{A}$ und daher nach dem schon bewiesenen auch assoziativ. Die Ergebnisse dieses Abschnittes fassen wir nun zusammen in

Satz 4.2. Es sei $\mathcal{A}$ eine Lie-Tripel-Algebra über dem Körper K . Dann sind die Spurform und die Hauptspur von $\mathcal{A}$ assoziative Linearformen auf $\mathcal{A}$ mit Werten in K .

4. Aus der Theorie der Jordan-Algebren ist bekannt, daß die in Satz 4.2. genannten Linearformen unabhängig von der Struktur der Algebra für gewisse Charakteristiken des Grundkörpers identisch verschwinden. Um in unserer Situation hinreichende Bedingungen dafür zu gewinnen, daß diese Fälle nicht eintreten, wollen wir das Verhalten der beiden Linearformen auf Idempotenten untersuchen.

Es sei $\mathcal{A}$ eine Lie-Tripel-Algebra über K und $\text{Char } K \neq 2$. Für ein $u \in \mathcal{A}$ ist generell $\text{Sp}(u) = \text{Sp } L(u)$ die Summe der mit ihren Vielfachheiten beschwerten Eigenwerte von $L(u)$. Diese aber gehören, wenn $u = c$ ein Idempotent von $\mathcal{A}$ ist, gemäß §2, 1. der Menge $\mathfrak{M}_0 := \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ an, wobei 1 wegen $L(c)c = c$ auch wirklich auftritt. Somit gilt

$$\text{Sp}(c) = t + \frac{s}{2}$$

mit $t \in \mathbb{N}$, ganzem $s \geq 0$ und $t + s \leq n := \dim \mathcal{A}$; $\text{Sp}(c)$ wird also sicher dann ungleich Null, wenn $p := \text{Char } K = 0$ oder sonst $n \leq \frac{p}{2}$ ist.

Um ein entsprechendes Resultat für die Hauptspur zu gewinnen, nehmen wir jetzt zusätzlich an, $\mathcal{A}$ besitze ein Einselement e . Es sei x ein generisches Element von $\mathcal{A}$, das bezüglich einer Basis von $\mathcal{A}$ die Komponenten $\tau_1, \dots, \tau_n$ aufweisen möge. Nach dem Satz von Hamilton-Cayley wird nun

$$|\text{Id} - L(x)| \Big|_{\tau \rightarrow x} = |\text{Id} - L(x)| \Big|_{\tau \rightarrow L(x)e} = 0$$

wegen $L^r(x)e = x^r$ für alle $r \in \mathbb{N}$. Gemäß Lemma 3.1. ist also $f(\tau; x)$ ein Teiler von $|\text{Id} - L(x)|$, und es wird

$$(4.3) \quad |\text{Id} - L(x)| = f(\tau; x) q(\tau; x)$$

mit einem $q(\tau; x) \in K(\tau_1, \dots, \tau_n)[\tau]$. Die linke Seite von (4.3)

ist ein normiertes Polynom in τ und x , bekanntlich stellt dann auch $q(\tau; x)$ ein Polynom in τ und x dar, gehört also dem Ring $K[\tau_1, \dots, \tau_n][\tau]$ an. Folglich läßt sich x in (4.3) zum Idempotent c spezialisieren, und es erweist sich $f(\tau; c)$ als ein Teiler von $|\tau \text{Id} - L(c)|$, dessen Wurzeln bekanntlich ebenfalls der Menge $\mathcal{W}$ angehören. Dies gilt nunmehr auch für $f(\tau; c)$, also hat man

$$(4.4) \quad f(\tau; c) = \tau^r (\tau - \frac{1}{2})^s (\tau - 1)^t$$

mit nicht-negativen ganzen r, s, t und $r + s + t = m := \text{Gr } f(\tau; x)$.

Hieraus gewinnt man

$$(4.5) \quad \text{HS}(c) = t + \frac{s}{2},$$

und es wird $\text{HS}(c) \neq 0$, wenn $p = 0$ oder sonst $m \leq \frac{p}{2}$ gilt.

Besitzt $\mathcal{A}$ kein Einselement, so bezeichne $\hat{x}$ ein generisches Element von $\hat{\mathcal{A}}$. (4.4) ergibt sich dann für $\hat{f}(\tau; c)$ an Stelle von $f(\tau; c)$, während (4.5) formal ungeändert bleibt. Wegen $\hat{f}(0; c) = 0$ ist hier aber $r > 0$, also wird $\text{HS}(c) \neq 0$, wenn $p = 0$ oder sonst $\text{Gr } \hat{f}(\tau; \hat{x}) - 1 \leq \frac{p}{2}$ gilt.

Für eine Lie-Tripel-Algebra $\mathcal{A}$ setzen wir nun

$$(4.6) \quad r(\mathcal{A}) := \begin{cases} \text{Gr } f(\tau; x), & \text{falls } \mathcal{A} \text{ ein Einselement hat.} \\ \text{Gr } \hat{f}(\tau; \hat{x}) - 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ersichtlich ist $r(\mathcal{A})$ durch $\mathcal{A}$ eindeutig bestimmt und stets kleiner oder gleich der Dimension von $\mathcal{A}$. Zusammengefaßt haben wir nun

Satz 4.3. Es sei $\mathcal{A}$ eine Lie-Tripel-Algebra über einem Körper K der Charakteristik $p \neq 2$. Gilt dann $p = 0$ oder sonst $\dim \mathcal{A} \leq \frac{p}{2}$ bzw. $r(\mathcal{A}) \leq \frac{p}{2}$, so nimmt die Spurform bzw. die Hauptspur von $\mathcal{A}$ auf Idempotenten von $\mathcal{A}$ stets Werte ungleich Null an.

6. Dieser Satz hat eine sehr wichtige Konsequenz, die wir wie folgt formulieren:

Satz 4.4. Die Lie-Tripel-Algebra $\mathfrak{A}$ über dem Körper K sei einfach und besitze ein Idempotent c , es sei $p := \text{Char } K = 0$ oder sonst $r(\mathfrak{A}) \leq \frac{p}{2}$. Dann ist $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra.

Beweis. Wir behandeln zunächst die trivialen Fälle $p = 2, 3$, woraus notwendig $r(\mathfrak{A}) = 1$ folgt. Hat $\mathfrak{A}$ nun ein Einselement e , so folgt $x = \alpha e$ für ein generisches Element x von $\mathfrak{A}$, also $\mathfrak{A} = Ke$. Hat $\mathfrak{A}$ hingegen kein Einselement, so wird, wenn $\hat{x}$ ein generisches Element von $\hat{\mathfrak{A}}$ bezeichnet, $\text{Gr } \hat{f}(\tau; \hat{x}) = 2$, $\hat{L}(\hat{x}^2)$ also eine Linearkombination von $\hat{L}(\hat{x})$ und $\hat{\text{Id}}$. In beiden Fällen erweist sich $\mathfrak{A}$ als eine Jordan-Algebra.

Nun sei $p \neq 2, 3$; gemäß Satz 4.2. ist dann $\text{Bk}_{\text{HS}}(\mathfrak{A})$ ein Ideal in $\mathfrak{A}$, kann also mit Rücksicht auf die Einfachheit nur Null oder $\mathfrak{A}$ sein. Letzteres ist unmöglich, da wegen Satz 4.3. $\text{HS}(c) = \text{HS}(c^2) \neq 0$, also $c \notin \text{Bk}_{\text{HS}}(\mathfrak{A})$ gilt. Mit $\text{Bk}_{\text{HS}}(\mathfrak{A}) = 0$ aber bringt das Korollar von Satz 4.1. das Gewünschte.

§ 5. Ein Radikalbegriff.

1. Für die Dauer dieses Paragraphen sei die Charakteristik des Körpers K ungleich 2. Da sich die folgende Betrachtung sehr stark am Radikalbegriff für Jordan-Algebren orientiert, wollen wir auf diesen nach dem Muster von [1] kurz eingehen. Es sei $\mathcal{A}$ eine Jordan-Algebra über K , dann läßt sich das Radikal von $\mathcal{A}$ definieren durch

$$(5.1) \quad \text{Rad } \mathcal{A} := \{u; u \in \mathcal{A}, u, uv \text{ nilpotent für alle } v \in \mathcal{A}\}.$$

$\text{Rad } \mathcal{A}$ ist stets ein Ideal in $\mathcal{A}$ und gleichzeitig die Vereinigung aller Nilideale (vgl. §0,4.) von $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ heißt halbeinfach, wenn $\text{Rad } \mathcal{A} = 0$ gilt. Für eine beliebige Jordan-Algebra $\mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}/\text{Rad } \mathcal{A}$ halbeinfach, und aus der Halbeinfachheit von $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ für ein Ideal $\mathfrak{I}$ in $\mathcal{A}$ folgt, daß $\text{Rad } \mathcal{A} \subset \mathfrak{I}$ gilt.

Eine halbeinfache Jordan-Algebra läßt sich bis auf die Reihenfolge eindeutig schreiben als direkte Summe einfacher Algebren. Jede einfache Jordan-Algebra ist halbeinfach. Es existiert eine assoziative Linearform auf $\mathcal{A}$, die sogenannte reduzierte Spur von $\mathcal{A}$ (Bezeichnung: $\text{RS}(\cdot)$, hier auch gelegentlich $\text{RS}_{\mathcal{A}}(\cdot)$), so daß die Gleichung

$$(5.2) \quad \text{Rad } \mathcal{A} = \text{Bk}_{\text{RS}}(\mathcal{A})$$

besteht. Die Werte der reduzierten Spur liegen im algebraischen Abschluß $\bar{K}$ von K , und für ein absolut primitives Idempotent c einer beliebigen Erweiterung von $\mathcal{A}$ ist stets $\text{RS}(c) = 1$ ([1], III, Satz 7.4.).

2. Für eine beliebige Algebra $\mathcal{A}$ über K definieren wir nun

$$(5.3) \quad q(\mathcal{A}) := \bigcap \{ \mathfrak{I}; \mathfrak{I} \text{ Ideal in } \mathcal{A}, \mathcal{A}/\mathfrak{I} \text{ Jordan-Algebra} \}.$$

$q(\mathcal{A})$ ist wohldefiniert, da $\mathcal{A}$ der auf der rechten Seite von (5.3) erscheinenden Idealklasse angehört, und trivialerweise ein Ideal in $\mathcal{A}$. Ist $\mathfrak{I}$ ein Ideal in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ eine Jordan -

Algebra, so gilt für beliebige u, v

$$uv - vu, u(u^2v) - u^2(uv) \in \mathfrak{A};$$

folglich liegen diese Ausdrücke sogar in $\mathfrak{q}(\mathfrak{A})$, weshalb $\mathfrak{A}/\mathfrak{q}(\mathfrak{A})$ eine Jordan-Algebra ist. Gleichzeitig erhält man damit

$$(5.4) \quad \mathfrak{q}(\mathfrak{A}) = (\{[u, v]; u, v \in \mathfrak{A}\} \cup \{(u, v, u^2); u, v \in \mathfrak{A}\}).$$

Hieraus ergibt sich sofort, daß $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}$ für ein Ideal $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra genau dann darstellt, wenn $\mathfrak{q}(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}$ gilt. Offenbar ist $\mathfrak{q}(\mathfrak{A}) = 0$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra ist.

3. Der Radikalbegriff, den wir hier vorlegen wollen, läßt sich nun für eine beliebige Algebra $\mathfrak{A}$ über K wie folgt definieren:

$$(5.5) \quad \text{Rad } \mathfrak{A} := \{u; u \in \mathfrak{A}, \text{ es gibt ein } m \in \mathbb{N} :$$

$$u^m, (uv)^m \in \mathfrak{q}(\mathfrak{A}) \text{ für alle } v \in \mathfrak{A}\}.$$

Es ist evident, daß diese Definition mit (5.1) übereinstimmt, wenn $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra ist. Denn gemäß Lemma 3.1. und §3, 2. existiert zu jeder Algebra $\mathfrak{A}$ eine natürliche Zahl m (z.B. $m = \dim \mathfrak{A} + 1$), so daß ein Element $u \in \mathfrak{A}$ nilpotent ist dann und nur dann, wenn $u^m = 0$ gilt.

Bezeichnet man nun mit π den kanonischen Homomorphismus $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{q}(\mathfrak{A})$, so gewinnt man aus (5.1) und (5.5)

$$(5.6a) \quad \text{Rad } \mathfrak{A} = \pi^{-1}(\text{Rad}(\mathfrak{A}/\mathfrak{q}(\mathfrak{A}))),$$

woraus insbesondere hervorgeht, daß $\text{Rad } \mathfrak{A}$ ein Ideal in $\mathfrak{A}$ ist. Aus (5.5) ersieht man die Inklusion $\mathfrak{q}(\mathfrak{A}) \subset \text{Rad } \mathfrak{A}$. Deshalb kann man die offensichtliche Beziehung $\pi(\text{Rad } \mathfrak{A}) = \text{Rad}(\mathfrak{A}/\mathfrak{q}(\mathfrak{A}))$ in

der Form

$$(5.6b) \quad \text{Rad} \mathfrak{A} / \mathfrak{q}(\mathfrak{A}) = \text{Rad}(\mathfrak{A} / \mathfrak{q}(\mathfrak{A}))$$

schreiben. Wir wollen $\mathfrak{A}$ halbeinfach nennen, wenn ihr durch

(5.5) definiertes Radikal verschwindet. Wegen $\mathfrak{q}(\mathfrak{A}) \subset \text{Rad} \mathfrak{A}$ ist

offenbar jede halbeinfache Algebra eine Jordan-Algebra, insgesamt also eine halbeinfache Jordan-Algebra.*) Nun ergibt sich

Satz 5.1. $\mathfrak{A}$ sei eine Algebra über dem Körper K einer Charakteristik ungleich 2. Dann ist $\mathfrak{A} / \text{Rad} \mathfrak{A}$ halbeinfach, und aus der Halbeinfachheit von $\mathfrak{A} / \mathfrak{Q}$ für ein Ideal $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{A}$ folgt $\text{Rad} \mathfrak{A} \subset \mathfrak{Q}$.

Beweis. In Zukunft wollen wir stets die Restklasse modulo $\text{Rad} \mathfrak{A}$ eines Elementes $u \in \mathfrak{A}$ durch $\bar{u}$ wiedergeben. Wir beachten nun, daß $\mathfrak{A} / \text{Rad} \mathfrak{A}$ wegen $\mathfrak{q}(\mathfrak{A}) \subset \text{Rad} \mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra ist, und betrachten eine Restklasse $\bar{u} \in \text{Rad}(\mathfrak{A} / \text{Rad} \mathfrak{A})$. Dann existiert eine natürliche Zahl m_1 mit $\bar{u}^{m_1} = \bar{0}$ oder $u^{m_1} \in \text{Rad} \mathfrak{A}$. Nach (5.5) gilt also mit gewissem m_2

$$(5.7) \quad (u^{m_1})^{m_2} \in \mathfrak{q}(\mathfrak{A}).$$

Nun ist $\mathfrak{A} / \mathfrak{q}(\mathfrak{A})$ eine Jordan-Algebra, also insbesondere potenz-assoziativ, und man hat daher

*) Man beachte, daß unser Radikalbegriff im allgemeinen nur trivial sein kann. Geht man etwa von der Annahme aus, $\mathfrak{A}$ sei anti-kommutativ mit $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}$ (was für einfache Lie-Algebren der Charakteristik 0 in der Tat der Fall ist), so wird $[u, v] = 2uv$ für alle $u, v \in \mathfrak{A}$ und daher gemäß (5.4)

$$\mathfrak{A}^2 \subset \mathfrak{q}(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2,$$

also $\mathfrak{A} = \mathfrak{q}(\mathfrak{A}) = \text{Rad} \mathfrak{A}$.

$$(u^{m_1})^{m_2} - u^{m_1 m_2} \in \mathfrak{q}(\mathfrak{A}).$$

Mit (5.7) folgt also $u^{m_1 m_2} \in \mathfrak{q}(\mathfrak{A})$. Wegen $\bar{u} \in \text{Rad}(\mathfrak{A}/\text{Rad} \mathfrak{A})$ ist aber auch $\overline{uv} \in \text{Rad}(\mathfrak{A}/\text{Rad} \mathfrak{A})$ für alle $v \in \mathfrak{A}$, und für jedes solche v liegt daher eine gewisse Potenz von uv in $\mathfrak{q}(\mathfrak{A})$. Nach (5.5) ist also insgesamt $u \in \text{Rad} \mathfrak{A}$ oder $\bar{u} = \bar{0}$. Damit ist $\mathfrak{A}/\text{Rad} \mathfrak{A}$ als halbeinfach erkannt.

Nun betrachten wir ein Ideal $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}$ eine halbeinfache Jordan-Algebra ist. Mit $\mathfrak{q} := \mathfrak{q}(\mathfrak{A})$ gilt dann insbesondere $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{A}$, und der zweite Isomorphiesatz liefert

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{q} / \mathfrak{A}/\mathfrak{q}.$$

Nach Voraussetzung ist hier die linke, also auch die rechte Seite eine halbeinfache Jordan-Algebra, und nach dem, was in 1. gesagt wurde, ergibt sich daraus die Inklusion

$$\text{Rad}(\mathfrak{A}/\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{A}/\mathfrak{q}.$$

Dies in Verbindung mit (5.6a) ermöglicht die Inklusion $\text{Rad} \mathfrak{A}/\mathfrak{q} \subset \mathfrak{A}/\mathfrak{q}$; also hat man $\text{Rad} \mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$, und damit ist der Satz bewiesen.

4. Liegt eine Lie-Tripel-Algebra $\mathfrak{A}$ über K vor, so läßt sich die Darstellung des Ideals $\mathfrak{q}(\mathfrak{A})$ ein wenig vereinfachen. Zunächst ist $\mathfrak{A}$ kommutativ, weshalb sich (5.4) in

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{A}) = (\{u(u^2 v) - u^2(uv); u, v \in \mathfrak{A}\})$$

verwandelt. Hat K überdies vier Elemente, so kann man Satz 1.1.

(b) anwenden und bekommt:

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{A}) = (\{(u^2)^2 - u^4; u \in \mathfrak{A}\}).$$

Nun definieren wir:

Definition 5.1. Die Lie-Tripel-Algebra $\mathfrak{A}$ über K heißt eine eigentliche Lie-Tripel-Algebra dann und nur dann, wenn eine assoziative Linearform λ auf $\mathfrak{A}$ existiert, die auf allen absolut primitiven Idempotenten einer beliebigen Erweiterung von $\mathfrak{A}$ nicht verschwindet.

Zu den hiermit ausgezeichneten Lie-Tripel-Algebren gehören insbesondere die Jordan-Algebren, was man der in 1. angegebenen reduzierten Spur verdankt. Gemäß Satz 4.3. gilt dasselbe auch für Lie-Tripel-Algebren mit $p := \text{Char } K = 0$ oder wenigstens $r(\mathfrak{A}) \leq \frac{p}{2}$. Denn mit dem Minimalpolynom eines generischen Elementes bleibt auch die Hauptspur bei Grundkörper-Erweiterung invariant. Nun beweisen wir

Satz 5.2. Das Radikal einer eigentlichen Lie-Tripel-Algebra $\mathfrak{A}$ über dem Körper K einer Charakteristik ungleich 2,3 enthält kein Idempotent. Besitzt $\mathfrak{A}$ hingegen ein solches, und ist $\mathfrak{A}$ einfach, dann ist $\mathfrak{A}$ halbeinfach und daher eine Jordan-Algebra.

Beweis. Für ein Idempotent $c \in \mathfrak{A}$ besteht nach Lemma 2.2. (b) eine Darstellung

$$c = \sum_{i=1}^k c_i, \quad c_i c_j = \delta_{ij} c_i, \quad c_1 \neq 0,$$

wobei die c_i in einer Grundkörper-Erweiterung $\tilde{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ liegen und absolut primitiv sind. Sei λ die mit $\mathfrak{A}$ durch Definition 5.1. verknüpfte Linearform, dann gilt

$$\lambda(cc_1) = \lambda(c_1) \neq 0.$$

Daraus folgt $c \notin \text{Bk}_\lambda(\tilde{\mathfrak{A}})$, weshalb c auch nicht in $\text{Bk}_\lambda(\mathfrak{A})$ liegen kann. Nun ist $\mathfrak{A}/\text{Bk}_\lambda(\mathfrak{A})$ gemäß Satz 4.1. eine Jordan-Algebra, und das erzwingt die Inklusion $\mathfrak{q}(\mathfrak{A}) \subset \text{Bk}_\lambda(\mathfrak{A})$. Folglich gilt $c \notin \mathfrak{q}(\mathfrak{A})$. Da die Annahme, c liege in $\text{Rad } \mathfrak{A}$, notwendig den Widerspruch impliziert, daß eine Potenz von c , also c zu $\mathfrak{q}(\mathfrak{A})$ gehört, erhält man den ersten Teil des Satzes.

Der Rest ist danach trivial.

5. Wir untersuchen nun den Einfluß von Homomorphismen auf die in diesem Paragraphen entwickelten Begriffe und beweisen Satz 5.3. Es seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Algebren über dem Körper K einer Charakteristik ungleich 2, $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sei ein surjektiver (Algebren -) Homomorphismus. Dann gilt

$$(5.8) \quad \varphi(\text{Rad } \mathcal{A}) = \text{Rad } \mathcal{B}, \quad \varphi(\text{Rad } \mathcal{A}) \subseteq \text{Rad } \mathcal{B}.$$

Wenn überdies der Kern $\mathcal{I}$ von φ in $\text{Rad } \mathcal{A}$ liegt, so gilt

$$(5.8)^* \quad \varphi(\text{Rad } \mathcal{A}) = \text{Rad } \mathcal{B}.$$

Beweis. Wir verwenden (5.4), wonach das Ideal $\varphi(\text{Rad } \mathcal{A})$ in $\mathcal{B}$ erzeugt wird von den Ausdrücken der Gestalt

$$u\varphi(v)v - v\varphi(u)u, \quad u\varphi((uv)^2) - (u\varphi(v)u)^2$$

mit beliebigen $u, v \in \mathcal{A}$. Wegen der Surjektivität von φ erbringt nun (5.4) für $\mathcal{B}$ an Stelle von $\mathcal{A}$ den ersten Teil von (5.8).

Jetzt sei $u \in \text{Rad } \mathcal{A}$, dann wird $u^m, (uv)^m \in \varphi(\text{Rad } \mathcal{A})$ für ein gewisses $m \in \mathbb{N}$ und alle $v \in \mathcal{A}$. Eine Anwendung von φ erbringt

$$(u\varphi(v))^m, (u\varphi(v)u)^m \in \varphi(\text{Rad } \mathcal{B}),$$

wiederum für alle $v \in \mathcal{A}$. Daraus aber folgt $u\varphi(v)u \in \text{Rad } \mathcal{B}$, und

(5.8) ist vollständig bewiesen.

Nehmen wir zusätzlich an, es sei $\mathcal{I} \subseteq \text{Rad } \mathcal{A}$, so ergibt der Homomorphiesatz für φ bzw. $\varphi|_{\text{Rad } \mathcal{A}}$

$$(5.9) \quad \mathcal{A}/\mathcal{I} \cong \mathcal{B}, \quad \text{Rad } \mathcal{A}/\mathcal{I} \cong \text{Rad } \mathcal{B}.$$

Auf grund des zweiten Isomorphiesatzes ist außerdem

$$\mathcal{A}/\text{Rad } \mathcal{A} \cong (\mathcal{A}/\mathcal{I}) / \text{Rad } \mathcal{A}/\mathcal{I},$$

und daraus folgt gemäß Satz 5.1.:

$$(5.10) \quad \text{Rad } (\mathcal{A}/\mathcal{I}) \subseteq \text{Rad } \mathcal{A}/\mathcal{I}.$$

Da die Radikale isomorpher Algebren offenbar ebenfalls isomorph sind, ermöglichen die Identitäten (5.9), (5.10) die folgende Dimensionsabschätzung:

$$\dim \text{Rad } \mathfrak{L} = \dim \text{Rad}(\mathfrak{A}/\mathfrak{L}) \leq \dim \text{Rad } \mathfrak{A}/\mathfrak{L} = \dim \text{WRad } \mathfrak{A}.$$

Im Zusammenhang mit (5.8) liefert dies (5.8)* und damit den Satz.

Korollar. Es sei $\mathfrak{L}$ ein Ideal der Algebra $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{L} \subset \text{Rad } \mathfrak{A}$.

Dann gilt:

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{A}/\mathfrak{L}) = \mathfrak{q}(\mathfrak{A}) + \mathfrak{L}/\mathfrak{L}, \quad \text{Rad}(\mathfrak{A}/\mathfrak{L}) = \text{Rad } \mathfrak{A}/\mathfrak{L}.$$

Beweis. Man verwende Satz 5.3. für den natürlichen Homomorphismus $\pi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{L}$ an Stelle von W .

Satz 5.4. $\mathfrak{A}$ sei eine Algebra über dem Körper K einer Charakteristik ungleich 2.

(a) Ist dann $\mathfrak{L}$ eine Unteralgebra und $\mathfrak{L}$ ein Ideal von $\mathfrak{A}$, so gilt

$$(5.11) \quad \mathfrak{q}(\mathfrak{L}) \subset \mathfrak{L} \cap \mathfrak{q}(\mathfrak{A}), \quad \text{Rad } \mathfrak{L} \subset \mathfrak{L} \cap \text{Rad } \mathfrak{A}.$$

(b) Genügt $\mathfrak{A}$ der direkten Summendarstellung

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{A}_r,$$

so wird

$$(5.12) \quad \mathfrak{q}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{q}(\mathfrak{A}_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{q}(\mathfrak{A}_r),$$

$$(5.12)^* \quad \text{Rad } \mathfrak{A} = \text{Rad } \mathfrak{A}_1 \oplus \dots \oplus \text{Rad } \mathfrak{A}_r.$$

Beweis. (a) Man verwendet den ersten Isomorphiesatz und erhält:

$$\mathfrak{L}/\mathfrak{L} \cap \mathfrak{q}(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{L} + \mathfrak{q}(\mathfrak{A})/\mathfrak{q}(\mathfrak{A})$$

bzw.

$$\mathfrak{L}/\mathfrak{L} \cap \text{Rad } \mathfrak{A} \cong \mathfrak{L} + \text{Rad } \mathfrak{A}/\text{Rad } \mathfrak{A}.$$

Hier ist die rechte Seite jeweils eine Unteralgebra bzw. ein Ideal der Jordan-Algebra $\mathfrak{A}/\mathfrak{q}(\mathfrak{A})$ bzw. der halbeinfachen Jordan-Algebra $\mathfrak{A}/\text{Rad } \mathfrak{A}$, also selbst eine Jordan-Algebra bzw. halbeinfach ([1]). Dies gilt dann auch für die linke Seite, und beachtet man nun noch Satz 5.1., so folgt (5.11).

(b) Die $\mathfrak{A}_i$ sind Ideale in $\mathfrak{A}$, weshalb (5.11) die Inklusionen $\mathfrak{q}(\mathfrak{A}_i) \subset \mathfrak{q}(\mathfrak{A})$, $\text{Rad } \mathfrak{A}_i \subset \text{Rad } \mathfrak{A}$ ermöglicht. Daher gilt „ $\supset$ “ in (5.12), (5.12)*. Für $i = 1, \dots, r$ sei nun W_i die natür -

liche Projektion $\alpha \longrightarrow \alpha_i$. Dann hat man gemäß (5.8):

$$w_1 q(\alpha) = q(\alpha_i), w_1 \text{Rad} \alpha \subset \text{Rad} \alpha_i.$$

Daraus aber folgt " $\subset$ " in (5.12), (5.12)*, und der Satz ist bewiesen.

6. Es ist nützlich, das hier definierte Radikal mit den klassischen Begriffsbildungen dieser Art zu konfrontieren. Unter diesen werden sich vor allem diejenigen als wichtig erweisen, welche mit der Eigenschaft der Auflösbarkeit zusammenhängen. Wir beziehen uns im folgenden auf die Bezeichnungen in §0,3. und definieren (vgl. etwa [9]):

Definition 5.2. Es sei α eine Algebra über K .

(a) Für nicht-negatives ganzes k definieren wir eine Unteralgebra $\alpha^{(k)}$ in α durch das Induktionsschema

$$(5.13) \quad \alpha^{(0)} := \alpha, \quad \alpha^{(k+1)} := (\alpha^{(k)})^2.$$

(b) α heißt auflösbar, wenn eine ganze Zahl $k \geq 0$ existiert mit $\alpha^{(k)} = 0$.

Im Zusammenhang mit dieser Definition ist für eine Algebra α über K die Identität

$$(5.14) \quad (\alpha^{(i)})^{(k)} = \alpha^{(i+k)} \quad (i, k \in \mathbb{Z}; i, k \geq 0)$$

von Interesse, welche sich mit Induktion leicht beweisen läßt.

In α existiert stets genau ein maximales auflösbares Ideal $\mathfrak{s}(\alpha)$, das alle Ideale von α mit dieser Eigenschaft umfaßt ([9]). Ist α eine Jordan-Algebra, dann stimmt $\mathfrak{s}(\alpha)$ mit $\text{Rad} \alpha$ überein ([2]). Wir beweisen nun

Lemma 5.1. Es sei α eine beliebige Algebra über K , dann enthält $\text{Rad} \alpha$ das maximale auflösbare Ideal $\mathfrak{s}(\alpha)$ von α .

Beweis. π sei der natürliche Homomorphismus $\alpha \longrightarrow \alpha / \text{Rad} \alpha$, dann ist $\pi(\mathfrak{s}(\alpha))$ offenbar ein auflösbares Ideal der halbeinfachen Jordan-Algebra $\alpha / \text{Rad} \alpha$. Somit wird $\pi(\mathfrak{s}(\alpha)) = 0$, und daher gilt $\mathfrak{s}(\alpha) \subset \text{Rad} \alpha$.

Satz 5.5. Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra über dem Körper K einer Charakteristik ungleich 2, dann existiert eine natürliche Zahl k mit

$$(5.15) \quad (\text{Rad } \mathcal{A})^{(k)} \subset \mathfrak{q}(\mathcal{A}).$$

Ist $\text{Rad } \mathcal{A}$ sogar auflösbar und $\mathfrak{L}$ eine Unter algebra von $\mathcal{A}$, so ist auch $\text{Rad } \mathfrak{L}$ auflösbar.

Beweis. Nach (5.6b) ist

$$\text{Rad } \mathcal{A} / \mathfrak{q}(\mathcal{A}) = \text{Rad}(\mathcal{A} / \mathfrak{q}(\mathcal{A}))$$

ein auflösbares Ideal von $\mathcal{A} / \mathfrak{q}(\mathcal{A})$. Es existiert also eine natürliche Zahl k mit

$$0 = (\text{Rad } \mathcal{A} / \mathfrak{q}(\mathcal{A}))^{(k)} = (\text{Rad } \mathcal{A})^{(k)} / \mathfrak{q}(\mathcal{A}).$$

Das bedeutet aber gerade die Gültigkeit von (5.15).

Nun sei $\mathfrak{L}$ eine Unter algebra von $\mathcal{A}$. Verwendet man (5.11) und (5.15), so ergibt sich

$$(5.16) \quad (\text{Rad } \mathfrak{L})^{(k)} \subset \mathfrak{q}(\mathfrak{L}) \subset \mathfrak{q}(\mathcal{A}) \subset \text{Rad } \mathcal{A}$$

mit einem gewissen $k \in \mathbb{N}$. Zusammen mit (5.14) beweist dies den Satz.

7. Ist $\mathcal{A}$ eine beliebige Algebra über dem Körper K , so kann man die Algebra $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + Ke$ (vgl. §0,4.) betrachten, die aus $\mathcal{A}$ durch Adjunktion des Einselementes e hervorgeht. Wie sich die Begriffsbildungen dieses Paragraphen bei diesem Übergang transformieren, beschreibt

Satz 5.6. Es sei $\mathcal{A}$ eine Algebra über dem Körper K einer Charakteristik ungleich 2. Dann gilt

$$\mathfrak{q}(\hat{\mathcal{A}}) = \mathfrak{q}(\mathcal{A}), \quad \text{Rad } \hat{\mathcal{A}} = \text{Rad } \mathcal{A}.$$

Beweis. Für $u, v \in \mathcal{A}$ und $\alpha, \beta \in K$ erbringt eine leichte Rechnung:

$$(5.17) \quad (u + \alpha e)((u + \alpha e)^2(v + \beta e)) - (u + \alpha e)^2((u + \alpha e)(v + \beta e)) = u(u^2v) - u^2(uv).$$

Da nun jedes Ideal in $\mathcal{A}$ ein solches in $\hat{\mathcal{A}}$ ist, folgt aus (5.17) sofort: $q(\hat{\mathcal{A}}) = q(\mathcal{A})$. Nun sei $u + \alpha e \in \text{Rad } \hat{\mathcal{A}}$ ($u \in \mathcal{A}, \alpha \in K$), nach Definition existiert dann eine natürliche Zahl m mit $(u + \alpha e)^m \in q(\mathcal{A})$. Nun ist aber

$$(u + \alpha e)^m = u_m + \alpha^m e$$

mit einem $u_m \in \mathcal{A}$, so daß man auf $\alpha = 0$ schließen kann. Daher gilt $\text{Rad } \hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, und Satz 5.4. (a) erzwingt die Inklusion $\text{Rad } \mathcal{A} \subset \text{Rad } \hat{\mathcal{A}}$. Zum Beweis der Umkehrung sei $u \in \text{Rad } \hat{\mathcal{A}}$. Da $q(\hat{\mathcal{A}})$ mit $q(\mathcal{A})$ übereinstimmt, existiert dann eine natürliche Zahl m mit $u^m, (uv)^m \in q(\mathcal{A})$ für alle $v \in \mathcal{A}$. Daraus aber folgt $u \in \text{Rad } \mathcal{A}$, und der Satz ist bewiesen.

§ 6. Beispiele.

1. Die Lie-Tripel-Algebren, welche wir in diesem Paragraphen vorlegen wollen, werden sich als Verallgemeinerungen eines wohlbekannten Typs von Jordan-Algebren erweisen, über den wir hier deshalb kurz referieren wollen. Eine ausführliche Darstellung dieses Gegenstandes findet sich in [1], VI, §5.

Für die Dauer dieses Paragraphen legen wir verbindlich die folgende Situation zugrunde: Es sei X ein Vektorraum über dem Körper K und $0 < n := \dim X < \infty$. Wir weichen von dem bisherigen Sprachgebrauch ab und unterstellen den im folgenden auftretenden Linear- bzw. Bilinearformen auf X bzw. $X \times X$ stets, Werte im Grundkörper K zu haben.

Nun sei $e \in X$ von 0 verschieden und μ eine symmetrische Bilinearform auf X mit $\mu(e, e) = 1$. Wir setzen ($u, v \in X$):

$$(6.1) \quad uv := \lambda(u)v + \lambda(v)u - \mu(u, v)e$$

mit $\lambda(u) := \mu(e, u)$. Durch diese Multiplikation wird auf X eine Jordan-Algebra $\mathcal{A} = [X; \mu, e]$ mit dem Einselement e definiert. $\mathcal{A}$ hat entweder den Grad 1 oder 2; gilt $\text{Char } K \neq 2$, so tritt ersteres genau dann ein, wenn

$$(6.2) \quad \mu(u, v) = \lambda(u)\lambda(v)$$

identisch in $u, v \in \mathcal{A}$ erfüllt ist. Das Bestehen von (6.2) zieht außerdem die Assoziativität von $\mathcal{A}$ nach sich, und daraus folgt umgekehrt (6.2), wenn die Dimension von $\mathcal{A}$ ungleich 2 ist. Generell stimmen die Bilinearkerne von μ und λ überein und sind gleich dem Radikal von $\mathcal{A}$. Insbesondere ist $\mathcal{A}$ für den Fall einer von 2 verschiedenen Charakteristik halbeinfach dann und nur dann, wenn die Bilinearform μ nicht-ausgeartet ist.

2. $e, f \in X$ seine von 0 verschieden, λ sei eine Linear- und σ eine symmetrische Bilinearform auf X , so daß gilt:

$$(6.3) \quad \lambda(e) = 1, \quad \sigma(e, u) = \sigma(f, u) = 0 \quad (u \in X).$$

Damit definieren wir für $u, v \in X$:

$$(6.4) \quad uv =: \lambda(u)v + \lambda(v)u - \lambda(u)\lambda(v)e + \sigma(u, v)f.$$

Da hier die rechte Seite in beiden Variablen u, v linear und homogen ist, wird auf X vermöge (6.4) eine kommutative Algebra mit dem Einselement e erklärt, die wir mit $[X; \lambda, \sigma; e, f]$ bezeichnen und im Zusammenhang durch $\mathcal{A}$ abkürzen wollen. Wie wir später sehen werden, spielen für diese Algebra nicht nur λ und σ , sondern auch die durch

$$(6.5) \quad \mu(u, v) := \lambda(u)\lambda(v) - \lambda(f)\sigma(u, v)$$

definierte Bilinearform μ eine wichtige Rolle. Offenbar geht $\mathcal{A}$ bei Grundkörper-Erweiterung in eine Algebra vom gleichen Typ über.

Setzt man auf (6.4) λ bzw. (bei festem $w \in \mathcal{A}$) $\sigma(*, w)$ an, so ergibt sich ($u, v \in \mathcal{A}$)

$$(6.6) \quad \lambda(uv) = \lambda(u)\lambda(v) + \lambda(f)\sigma(u, v)$$

und ($u, v, w \in \mathcal{A}$)

$$(6.7) \quad \sigma(uv, w) = \lambda(u)\sigma(v, w) + \lambda(v)\sigma(u, w).$$

Nunmehr wird für beliebige $u, v, w \in \mathcal{A}$ nach leichter Rechnung:

$$\begin{aligned} (uv)w &= \lambda(v)\lambda(w)u + \lambda(u)\lambda(w)v + [\lambda(u)\lambda(v) + \lambda(f)\sigma(u, v)]w - \\ &\quad - [2\lambda(u)\lambda(v) + \lambda(f)\sigma(u, v)]\lambda(w)e + \\ &\quad + [\lambda(u)\sigma(v, w) + \lambda(v)\sigma(u, w) + \lambda(w)\sigma(u, v)]f. \end{aligned}$$

Indem man hiervon den Ausdruck subtrahiert, der durch Vertauschen von u mit w entsteht, ergibt sich der Assoziator der Elemente $u, v, w \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} (6.8) \quad (u, v, w) &= -\lambda(f)\sigma(v, w)u + \lambda(f)\sigma(u, v)w + \\ &\quad + \lambda(f)[\lambda(u)\sigma(v, w) - \lambda(w)\sigma(u, v)]e. \end{aligned}$$

Substituiert man hier v durch vy , so erhält man

$$\begin{aligned} (6.9) \quad (u, vy, w) &= -\lambda(f)\sigma(vy, w)u + \lambda(f)\sigma(u, vy)w + \\ &\quad + \lambda(f)[\lambda(u)\sigma(vy, w) - \lambda(w)\sigma(u, vy)]e. \end{aligned}$$

Multipliziert man andererseits (6.8) mit y , so ergibt sich:

$$\begin{aligned}(u, v, w)y &= -\lambda(f)\lambda(y)\sigma(v, w)u + \lambda(f)\lambda(y)\sigma(u, v)w + \\ &+ \lambda(f)\lambda(y)[\lambda(u)\sigma(v, w) - \lambda(w)\sigma(u, v)]e + \\ &+ \lambda(f)[\sigma(u, v)\sigma(w, y) - \sigma(u, y)\sigma(v, w)]f.\end{aligned}$$

Hierzu addiere man den durch Vertauschen von v mit y entstehen - den Ausdruck und vergleiche das Ergebnis mit der rechten Seite von (6.9) unter Berücksichtigung von (6.7). Dann zeigt sich, daß die Beziehung (1.4) nach einer geeigneten Umbenennung für alle $u, v, w, y \in \mathcal{A}$ erfüllt ist. Dies sichert den ersten Teil von

Satz 6.1. Die Algebra $\mathcal{A} = [X; \lambda, \sigma; e, f]$ über dem Körper K ist stets eine Lie-Tripel-Algebra. Gilt $\text{Char } K \neq 2$, so ist $\mathcal{A}$ eine Jordan-Algebra dann und nur dann, wenn eine der folgenden Bedingungen besteht.

- 1.) $\lambda(f) = 0$,
- 2.) $\sigma = 0$,
- 3.) e und f sind linear abhängig über K .

Die Gültigkeit von 1.) oder 2.) zieht sogar die Assoziativität von $\mathcal{A}$ nach sich.

Beweis. (a) Wir nehmen zunächst an, eine der Bedingungen

1.) - 3.) sei erfüllt. Ist zunächst $\lambda(f) = 0$, so lehrt (6.8) die Assoziativität von $\mathcal{A}$. Dasselbe folgt aus 2.), was man mit (6.4) erkennt. Sind schließlich e und f linear abhängig, so wird gemäß (6.3) notwendig $f = \lambda(f)e$; trägt man dies in (6.4) ein, so sieht man, daß $\mathcal{A}$ mit der Jordan-Algebra $[X; \mu, e]$ übereinstimmt, da ersichtlich $\lambda(u) = \mu(e, u)$ für alle $u \in \mathcal{A}$ gilt.

(b) Es seien $u, v \in \mathcal{A}$. Setzt man dann $w := u^2$ in (6.8), so entsteht nach einigen Umformungen

$$(6.10) \quad (u, v, u^2) = \lambda(f)\sigma(u, u)\sigma(u, v)(f - \lambda(f)e).$$

Nun nehmen wir an, es sei $\mathcal{A}$ eine Jordan-Algebra und sowohl $\lambda(f) \neq 0$ als auch $\sigma \neq 0$. Die rechte Seite von (6.10) verschwindet

für alle $u, v \in \mathcal{A}$, also insbesondere dann, wenn man $v = u$ setzt. Wegen $\sigma \neq 0$ und $\text{Char } K \neq 2$ existiert nun sicher ein $u \in \mathcal{A}$ mit $\sigma(u, u) \neq 0$, und daraus folgt mit $f = \lambda(f)e$ die lineare Abhängigkeit von $\{e, f\}$.

3. Um im folgenden lästige Fallunterscheidungen zu vermeiden, nehmen wir bis auf weiteres an, es sei $\text{Char } K \neq 2$ und

$\mathcal{A} = [X; \lambda, \sigma; e, f]$. Wir tragen λ in (6.8) ein und stellen fest, daß λ eine assoziative Linearform auf $\mathcal{A}$ ist. Nun gilt

$$(6.11) \quad \text{Bk}_{\mu}(\mathcal{A}) = \text{Bk}_{\lambda}(\mathcal{A}) \not\subseteq \text{Bk}_{\sigma}(\mathcal{A}) \quad (\lambda(f) \neq 0).$$

Zum Beweis sei zunächst $u \in \text{Bk}_{\lambda}(\mathcal{A})$. Da $\mathcal{A}$ ein Einselement besitzt, gilt dann $\lambda(u) = \lambda(uv) = 0$ für alle $v \in \mathcal{A}$, und (6.6) bringt $\sigma(u, v) = 0$ für alle $v \in \mathcal{A}$, d.h. $u \in \text{Bk}_{\sigma}(\mathcal{A})$. Dann aber kommt $\mu(u, v) = 0$ für alle $v \in \mathcal{A}$ gemäß (6.5), und es gilt insgesamt $\text{Bk}_{\lambda}(\mathcal{A}) \subset \text{Bk}_{\mu}(\mathcal{A}) \cap \text{Bk}_{\sigma}(\mathcal{A})$. Umgekehrt sei $u \in \text{Bk}_{\mu}(\mathcal{A})$. Nach (6.5) folgt

$$\lambda(u)\lambda(v) = \lambda(f)\sigma(u, v)$$

für alle $v \in \mathcal{A}$. Der Spezialfall $v = e$ bringt $\lambda(u) = 0$ wegen (6.3). Also ist $\sigma(u, v) = 0$ für alle $v \in \mathcal{A}$, und daraus folgt $u \in \text{Bk}_{\lambda}(\mathcal{A})$ durch (6.6). Da schließlich $e \in \text{Bk}_{\sigma}(\mathcal{A}) = \text{Bk}_{\lambda}(\mathcal{A})$ gilt, ist (6.11) vollständig bewiesen.

Es zeigt sich, daß man eine vollständige Übersicht über alle assoziativen Linearformen auf $\mathcal{A}$ gewinnen kann. Da diese jedoch für unsere weiteren Untersuchungen bedeutungslos ist, wollen wir sie hier ohne Beweis vorlegen. Ebenso verfahren wir anschließend mit einer Beschreibung der Spurform durch die Strukturkonstanten der Algebra $\mathcal{A}$.

Satz 6.2. Es sei die Charakteristik von K ungleich 2,

$\mathcal{A} = [X; \lambda, \sigma; e, f]$ und $\lambda(f) \neq 0$. Gilt dann

- 1.) $\dim \text{Bk}_{\sigma}(\mathcal{A}) = n$, so ist jede Linearform auf $\mathcal{A}$ assoziativ;
- 2.) $\dim \text{Bk}_{\sigma}(\mathcal{A}) = n - 1$, und ist ν_{σ} eine Linearform auf $\mathcal{A}$

mit dem Kern $Bk_{\sigma}(\mathcal{A})$, so ist ν_{σ} assoziativ und jede assoziative Linearform ν auf $\mathcal{A}$ schreibt sich eindeutig in der Gestalt

$$\nu = \alpha \lambda + \beta \nu_{\sigma} \text{ mit } \alpha, \beta \in K.$$

3.) $\dim Bk_{\sigma}(\mathcal{A}) \leq n - 2$, so ist jede assoziative Linearform auf $\mathcal{A}$ ein skalares Vielfaches von λ .

Lemma 6.1. Es sei $\lambda(f) \neq 0$, dann ist $Sp = n\lambda$.

wir bemerken noch, daß $Bk_{\sigma}(\mathcal{A})$ gemäß (6.7) eine Unterlgebra von $\mathcal{A}$ darstellt. Da für $u, v \in Bk_{\sigma}(\mathcal{A})$ in (6.4) kein Beitrag von f auftritt, ist diese assoziativ.

4. Es sei x ein generisches Element der Algebra $\mathcal{A} = [X; \lambda, \sigma; e, f]$. Aus der Identität (6.4) gewinnt man

$$(6.12) \quad x^2 = 2\lambda(x)x - \lambda^2(x)e + \sigma(x, x)f,$$

und daraus entsteht nach kurzer Rechnung

$$(6.13) \quad x^3 = [3\lambda^2(x) + \lambda(f)\sigma(x, x)]x - \lambda(x)[2\lambda^2(x) + \lambda(f)\sigma(x, x)]e + 3\lambda(x)\sigma(x, x)f.$$

Ein Vergleich mit (6.12) beweist, daß

$$x^3 - 3\lambda(x)x^2 + [3\lambda^2(x) - \lambda(f)\sigma(x, x)]x - [\lambda^3(x) - \lambda(f)\lambda(x)\sigma(x, x)]e = 0$$

gilt. Trägt man hier die Definition der Bilinearform μ ein, so ergibt sich

Satz 6.2. Es sei x ein generisches Element der Algebra $\mathcal{A} = [X; \lambda, \sigma; e, f]$ über dem Körper K einer Charakteristik ungleich 2. Dann ist das Minimalpolynom $f(\tau; x)$ von x ein Teiler des Polynoms

$$(6.14) \quad h(\tau; x) = \tau^3 - 3\lambda(x)\tau^2 + [2\lambda^2(x) + \mu(x, x)]\tau - \lambda(x)\mu(x, x).$$

Ist $\lambda(f) \neq 0$, so ist $\mathcal{A}$ keine Jordan-Algebra dann und nur dann, wenn $f(\tau; x)$ mit $h(\tau; x)$ übereinstimmt, in diesem Falle gilt also

$$HS(x) = 3\lambda(x), \quad HN(x) = \lambda(x)\mu(x, x).$$

Beweis. Wenn $\mathcal{A}$ keine Jordan-Algebra ist, kann $f(\tau; x)$ bekanntlich nicht vom Grade ≤ 2 sein, muß also mit $h(\tau; x)$ übereinstimmen. Umgekehrt sei dies der Fall, gemäß (6.12) ist dann weder $\sigma = 0$ noch $\{e, f\}$ linear abhängig über K . Da außerdem $\lambda(f) \neq 0$ gilt, stellt $\mathcal{A}$ nach Satz 6.1. keine Jordan-Algebra dar.

Lemma 6.2. Für ein Element u der Algebra $\mathcal{A} = [X; \lambda, \sigma; e, f]$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

- (a) u ist nilpotent,
- (b) $\lambda(u) = \mu(u, u) = 0$,
- (c) $u^3 = 0$.

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $u \neq 0$ annehmen. Wir beweisen

1.) " $(a) \implies (b)$ ": u sei nilpotent, nach §3, 5. ist dann $f_u(\tau) = \tau^r$ mit ganzem $r \geq 2$. Wegen $h(u; u) = 0$ und Lemma 3.1. ist daher τ^2 ein Teiler von $h(\tau; u)$; aus (6.14) folgt also

$$0 = \lambda(u)\mu(u, u) = 2\lambda^2(u) + \mu(u, u).$$

Multiplikation des ganz rechts stehenden Ausdrucks mit $\lambda(u)$ ergibt $\lambda(u) = 0$ und danach auch $\mu(u, u) = 0$.

2.) " $(b) \implies (c)$ ": Wenn $\lambda(u) = \mu(u, u) = 0$ gilt, so folgt

$$0 = h(u; u) = u^3,$$

und das ist (c). Mit der trivialen Konsequenz " $(c) \implies (a)$ " ergibt sich nun das Lemma.

5. Wir wollen nun das Radikal der Algebra $\mathcal{A} = [X; \lambda, \sigma; e, f]$ bestimmen, wenn $\lambda(f) \neq 0$ gilt. Zunächst untersuchen wir das Ideal $\mathfrak{q}(\mathcal{A})$ (vgl. §5, 2.), indem wir auf die Identität (6.10) zurückgehen. Danach ist für beliebige $u, v \in \mathcal{A}$:

$$(6.15) \quad u(u^2v) - u^2(uv) \in \langle f - \lambda(f)e \rangle.$$

Für $u \in \mathcal{A}$ wird nun nach (6.4)

$$\begin{aligned} u(f - \lambda(f)e) &= uf - \lambda(f)u = \lambda(u)f - \lambda(u)\lambda(f)e = \\ &= \lambda(u)(f - \lambda(f)e). \end{aligned}$$

Also ist $\langle f - \lambda(f)e \rangle$ ein Ideal in $\mathfrak{A}$, weshalb (6.15) und (5.4) die Inklusion $\mathfrak{q}(\mathfrak{A}) \subset \langle f - \lambda(f)e \rangle$ ermöglichen. Wenn nun $\mathfrak{A}$ keine Jordan-Algebra darstellt, so ist $\mathfrak{q}(\mathfrak{A})$ mindestens eindimensional, und daher gilt in diesem Falle

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{A}) = \langle f - \lambda(f)e \rangle.$$

Somit hat man den ersten Teil von

Satz 6.4. Es sei die Charakteristik des Körpers K ungleich

2, $\mathfrak{A} = [X; \lambda, \sigma; e, f]$ und $\lambda(f) \neq 0$. Dann ergibt sich

(a) Es gilt $\mathfrak{q}(\mathfrak{A}) = 0$ oder $\mathfrak{q}(\mathfrak{A}) = \langle f - \lambda(f)e \rangle$ je nach dem, ob $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra ist oder nicht.

(b) $\text{Rad } \mathfrak{A} = \text{Bk}_{\lambda}(\mathfrak{A}) = \{u; u \in \mathfrak{A}, uv \text{ nilpotent für alle } v \in \mathfrak{A}\}.$

(c) $(\text{Rad } \mathfrak{A})^2 = 0.$

(d) Bezeichnet U den $\text{Rad } \mathfrak{A}$ zugrundeliegenden Unterraum von X , $\bar{u}$ die Restklasse modulo U eines Elementes $u \in X$ und $\bar{\mu}$ die in natürlicher Weise durch μ auf X/U gegebene Bilinearform (vgl. (6.11)), so gilt

$$\mathfrak{A}/\text{Rad } \mathfrak{A} = [X/U; \bar{\mu}, \bar{e}].$$

Beweis. (a) wurde schon gezeigt. Zum Beweis von (b) sei nun

$u \in \mathfrak{A}$ und uv nilpotent für alle $v \in \mathfrak{A}$, dann folgt nach Lemma 6.2.: $\lambda(uv) = 0$ für alle $v \in \mathfrak{A}$, also $u \in \text{Bk}_{\lambda}(\mathfrak{A})$. Umgekehrt sei dies der Fall und $v \in \mathfrak{A}$. Da $\text{Bk}_{\lambda}(\mathfrak{A})$ ein Ideal in $\mathfrak{A}$ ist, gilt auch $uv \in \text{Bk}_{\lambda}(\mathfrak{A})$, also $uv \in \text{Bk}_{\mu}(\mathfrak{A})$ nach (6.11). Daraus folgt insbesondere

$$\lambda(uv) = \mu(uv, uv) = 0,$$

und Lemma 6.2. gewährleistet die Nilpotenz von uv . Damit ist der erste Teil von (b) bewiesen.

Bezeichnet nun π den natürlichen Homomorphismus

$\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}/\text{Rad } \mathfrak{A}$, so wird $\pi(\text{Bk}_\lambda(\mathfrak{A}))$ offenbar ein Nilideal der halbeinfachen Jordan-Algebra $\mathfrak{A}/\text{Rad } \mathfrak{A}$, ist also notwendig Null. Daraus folgt aber $\text{Bk}_\lambda(\mathfrak{A}) \subset \text{Rad } \mathfrak{A}$. Zum Beweis der Umkehrung betrachten wir die Algebra $\overline{\mathfrak{A}} := \mathfrak{A}/\text{Bk}_\lambda(\mathfrak{A})$. Die Restklasse modulo $\text{Bk}_\lambda(\mathfrak{A})$ eines Elementes $u \in \mathfrak{A}$ wollen wir hier mit $\bar{u}$ bezeichnen. Auf $\overline{\mathfrak{A}}$ definieren wir eine Linearform $\bar{\lambda}$ und eine symmetrische Bilinearform $\bar{\mu}$ durch ($u, v \in \mathfrak{A}$)

$$(6.16) \quad \bar{\lambda}(\bar{u}) := \lambda(u), \quad \bar{\mu}(\bar{u}, \bar{v}) := \mu(u, v),$$

was wegen (6.11) sinnvoll ist. Nun ist, wie man leicht sieht, $f - \lambda(f)e \in \text{Bk}_\lambda(\mathfrak{A})$ oder $\bar{f} = \bar{\lambda}(\bar{f})\bar{e}$. Damit erhält man aus (6.4) durch Restklassenbildung

$$(6.17) \quad \bar{u}\bar{v} = \bar{\lambda}(\bar{u})\bar{v} + \bar{\lambda}(\bar{v})\bar{u} - \bar{\mu}(\bar{u}, \bar{v})\bar{e}$$

und außerdem $\bar{\lambda}(\bar{u}) = \bar{\mu}(\bar{e}, \bar{u})$, $\bar{\mu}(\bar{e}, \bar{e}) = 1$. $\overline{\mathfrak{A}}$ erweist sich also als eine Jordan-Algebra von der in 1. geschilderten Art und überdies da $\bar{\mu}$ offenbar nicht-ausgeartet ist, als halbeinfach. Daraus aber folgt $\text{Rad } \mathfrak{A} \subset \text{Bk}_\lambda(\mathfrak{A})$ gemäß Satz 5.1., und (b) ist vollständig bewiesen. Mit (6.17) gilt gleichzeitig (d). Zum Beweis von (c) gehen wir auf (b) und (6.11) zurück. Für $u, v \in \text{Rad } \mathfrak{A}$ wird $\lambda(u) = \lambda(ue) = 0$ und ebenso $\lambda(v) = 0$; außerdem hat man gemäß (6.11): $\sigma(u, v) = 0$, und danach beweist die Definitionsgleichung (6.4), daß $uv = 0$ gilt.

Ohne näher darauf einzugehen, bemerken wir noch, daß sich die Aussage (c) in Satz 6.4. nicht nur für $\mathfrak{A}$ sondern auch für jede Unter algebra von $\mathfrak{A}$ beweisen läßt.

6. Wir wollen nun die Frage nach den Idempotenten in den Algebren $[X; \lambda, \sigma; e, f]$ untersuchen. Sofern es Jordan-Algebren sind haben wir darüber in 1. referiert. Die anderen Fälle erledigt der folgende

Satz 6.2. $\mathcal{A} = [X; \lambda, \sigma; e, f]$ sei keine Jordan-Algebra.

Dann gilt:

- (a) $\mathcal{A}$ und jede aus $\mathcal{A}$ durch Grundkörper-Erweiterung entstehende Algebra ist primär, d.h. $\mathcal{A}$ hat den Grad 1.
- (b) $\mathcal{A}/\text{Rad } \mathcal{A}$ hat den Grad 2, besitzt also, wenn X algebraisch abgeschlossen ist, ein von $\bar{e} := e + \text{Rad } \mathcal{A}$ verschiedenes Idempotent.

Beweis. (a) Da eine Algebra, die aus $\mathcal{A}$ durch Grundkörper-Erweiterung hervorgeht, ebenfalls die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt, genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{A}$ primär ist. Sei c ein Idempotent von $\mathcal{A}$, dann ist $c \neq 0$ und nach (6.12):

$$(2\lambda(c) - 1)c = \lambda^2(c)e - \sigma(c, c)f.$$

Hier kann der Koeffizient von c nicht verschwinden, weil daraus einerseits $\lambda(c) = \frac{1}{2}$, wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{e, f\}$ andererseits $\lambda(c) = 0$ folgen würde. Mithin gilt

$$(6.18) \quad c = \alpha e + \beta f$$

mit

$$(6.19) \quad \alpha = \frac{\lambda^2(c)}{2\lambda(c) - 1}, \quad \beta = -\frac{\sigma(c, c)}{2\lambda(c) - 1}.$$

Mit e, f (vgl. (6.1)) ist wegen (6.18) auch $c \in \text{Sk}_{\sigma}(\mathcal{A})$, insbesondere also $\sigma(c, c) = 0$. (6.19) bringt daher $\beta = 0$, d.h. $c = \alpha e$, und hier notiert die Idempotenz von c zu $\alpha = 1$, womit $\mathcal{A}$ als primär erkannt ist.

(b) In der Bezeichnung von Satz 6.4. hat $\mathcal{A}/\text{Rad } \mathcal{A}$ den Grad 1 gemäß 1. dann und nur dann, wenn (6.2) für $\bar{\mu}, \bar{\lambda}$ an Stelle von μ, λ besteht. Nach der Definition (6.16) bedeutet dies aber genau

$$\mu(u, v) = \lambda(u)\lambda(v)$$

für alle $u, v \in \mathcal{A}$. Vergleicht man dies mit (6.5), so wird notgedrungen $\lambda(f) = 0$ oder $\sigma = 0$, $\mathcal{A}$ gemäß Satz 6.1. also assoziativ.

Da $\mathfrak{A}$ aber nach Voraussetzung keine Jordan-Algebra ist, hat $\mathfrak{A}/\text{Rad}\mathfrak{A}$ den Grad 2. Nun sei K algebraisch abgeschlossen, bekanntlich stimmen dann für Jordan-Algebren über K Grad und Primitivgrad überein. Also hat $\mathfrak{A}/\text{Rad}\mathfrak{A}$ den Primitivgrad 2, und der Satz ist bewiesen.

7. Es kann keine echten Lie-Tripel-Algebren mit Einselement einer Dimension ≤ 2 geben, da in solchen Fällen das Minimalpolynom eines generischen Elementes einen Grad < 3 hat. Wir wollen jetzt aber ein dreidimensionales Beispiel von der in diesem Paragraphen konstruierten Art angeben.

Der Vektorraum X über K habe die Basis $\{e, f, g\}$. Darin entspreche der Linearform λ der Zeilenvektor

$$(\lambda) := (1 \ 1 \ 0)$$

und der Bilinearform σ die Matrix

$$(\sigma) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Algebra $\mathfrak{A} = [X; \lambda, \sigma; e, f]$ ist gemäß Satz 6.1. eine Lie-Tripel-Algebra, aber keine Jordan-Algebra. Wählt man als eine neue Basis $e, b_1 := g, b_2 := e - f$, so genügt $\mathfrak{A}$ der untenstehenden Multiplikationstafel:

	e	b_1	b_2
e	e	b_1	b_2
b_1	b_1	$e - b_2$	0
b_2	b_2	0	0

Gemäß Satz 6.4. (a) gilt nun

$$q(\mathfrak{A}) = Kb_2 \subset \text{Rad}\mathfrak{A}.$$

Andererseits kann $\text{Rad}\mathfrak{A}$

nicht die Dimension 2 haben, da es gemäß (6.11) echt in $B_{K_2}(\mathfrak{A})$ enthalten ist und σ nicht identisch verschwinden kann. Also gilt

$$\text{Rad}\mathfrak{A} = q(\mathfrak{A}) = Kb_2.$$

II Der Struktursatz von WEDDERBURN.

In diesem Abschnitt behandeln wir die Aufgabe, eine Klasse von Lie-Tripel-Algebren auszusondern, für die der Struktursatz von Wedderburn erfüllt ist. Dabei werden wir uns häufig eng an die Gedankengänge in [7] anschließen.

Wenn nicht ausdrücklich anders verfügt wird, sei im folgenden die Charakteristik des Grundkörpers K von 2 verschieden und $\mathfrak{A}$ eine Lie-Tripel-Algebra über K . Die Faktoralgebra $\mathfrak{A}/\text{Rad}\mathfrak{A}$ werde mit $\bar{\mathfrak{A}}$ und die Restklasse $u + \text{Rad}\mathfrak{A}$ ($u \in \mathfrak{A}$) mit $\bar{u}$ bezeichnet. Von der bislang praktizierten Konvention, den algebraischen Abschluß eines Körpers K durch $\bar{K}$ wiederzugeben, wollen wir uns dispensieren und stattdessen die Schreibweise K' verwenden.

§ 1. Eine notwendige Bedingung.

1. Für die Dauer dieses Paragraphen sei

(1.1) $\mathcal{A}$ eine Lie-Tripel-Algebra über K , deren Radikal kein Idempotent enthält.

Ersichtlich ist diese Voraussetzung für Jordan-Algebren und sicher dann erfüllt, wenn $p := \text{Char } K = 0$ oder sonst $r(\mathcal{A}) \leq \frac{p}{2}$ gilt (vgl. I, Satz 4.3.). Wir bemerken weiter, daß ihr mit $\mathcal{A}$ auch jede Unteralgebra $\mathcal{L}$ von $\mathcal{A}$ genügt. Denn nach I, Gleichung (5.16) existiert eine natürliche Zahl k mit

$$(\text{Rad } \mathcal{L})^{(k)} \subset \mathfrak{q}(\mathcal{L}) \subset \text{Rad } \mathcal{A}.$$

Läge also ein Idempotent c in $\text{Rad } \mathcal{L}$, so gehörte eine gewisse Potenz von c und daher c selber zu $\text{Rad } \mathcal{A}$.

2. Es ist zweckmäßig, die Bedeutung einer in der Einleitung zu dieser Untersuchung gelegentlich erscheinenden Rede-weise noch einmal ausdrücklich zu fixieren.

Definition 1.1. $\mathcal{A}$ erfüllt den Satz von Wedderburn (oder: $\mathcal{A}$ genügt einer Wedderburn-Zerlegung) dann und nur dann, wenn eine halbeinfache Unteralgebra $\mathcal{T}$ von $\mathcal{A}$ existiert mit

$$\mathcal{A} = \mathcal{T} + \text{Rad } \mathcal{A}.$$

Wir bringen nun ein wichtiges Kriterium in Gestalt von Lemma 1.1. (a) $\mathcal{A}$ erfüllt den Satz von Wedderburn dann und nur dann, wenn $\mathcal{A}$ eine zu $\overline{\mathcal{A}}$ isomorphe Unteralgebra $\mathcal{T}$ enthält, und in diesem Falle erbringt die Einschränkung des natürlichen Homomorphismus $\mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$ auf $\mathcal{T}$ einen Isomorphismus $\mathcal{T} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$.

(b) Erfüllt $\mathcal{A}$ den Satz von Wedderburn, so enthält jede idempotente Restklasse von $\overline{\mathcal{A}}$ einen idempotenten Vertreter in $\mathcal{A}$.

Beweis: (a) $\mathfrak{T}$ sei eine Unteralgebra von $\mathfrak{A}$, die zu $\bar{\mathfrak{A}}$ isomorph ist. Dann ist $\mathfrak{T}$ eine halbeinfache Jordan-Algebra, und $\mathfrak{T} \cap \text{Rad } \mathfrak{A}$ stellt ein Ideal in $\mathfrak{T}$ dar, das keine Idempotenten enthält. Daher ist es ein Nilideal, und die Halbeinfachheit von $\mathfrak{T}$ erzwingt $\mathfrak{T} \cap \text{Rad } \mathfrak{A} = 0$. Danach aber wird

$$\dim(\mathfrak{T} + \text{Rad } \mathfrak{A}) = \dim \bar{\mathfrak{A}} + \dim \text{Rad } \mathfrak{A} = \dim \mathfrak{A},$$

also $\mathfrak{A} = \mathfrak{T} + \text{Rad } \mathfrak{A}$, d.h. $\mathfrak{A}$ erfüllt den Satz von Wedderburn. Umgekehrt sei dies mit einem gewissen $\mathfrak{T}$ der Fall, dann bestätigt man leicht, daß die Transformation $u \rightarrow \bar{u}$ ($u \in \mathfrak{T}$) einen Isomorphismus $\mathfrak{T} \rightarrow \bar{\mathfrak{A}}$ darstellt.

(b) Nach (a) hat eine idempotente Restklasse von $\bar{\mathfrak{A}}$ einen idempotenten Vertreter in $\mathfrak{T}$, also in $\mathfrak{A}$.

3. Wir fassen nun eine Lie-Tripel-Algebra der Form $\mathfrak{A} = [X; \lambda, \sigma; e, f]$ mit $\lambda(f) \neq 0$, $\sigma \neq 0$ und über K linear unabhängigen $e, f \in X$ ins Auge, wie sie in I, § 6, 2. eingeführt wurde. Gemäß I, Satz 6.4. ist $(\text{Rad } \mathfrak{A})^2 = 0$, weshalb $\mathfrak{A}$ der Voraussetzung (1.1) genügt. In I, Satz 6.5. haben wir gezeigt, daß $\mathfrak{A}$ den Grad 1, $\bar{\mathfrak{A}}$ hingegen den Grad 2 hat. Folglich ist der Grad einer jeden Unteralgebra von $\mathfrak{A}$ kleiner oder gleich 1, insbesondere also von 2 verschieden, und da die Grade isomorpher Algebren übereinstimmen, kann es keine zu $\bar{\mathfrak{A}}$ isomorphe Unteralgebra von $\mathfrak{A}$ geben. Daher erfüllt $\mathfrak{A}$ wegen Lemma 1.1. nicht den Satz von Wedderburn.

Nehmen wir nun überdies an, es sei K algebraisch abgeschlossen, dann besitzt $\bar{\mathfrak{A}}$ wegen Satz 6.5., (b) ein von $\bar{e}$ verschiedenes Idempotent. Da $\mathfrak{A}$ primär ist, hat dieses sicher keinen idempotenten Vertreter in $\mathfrak{A}$.

§ 2. Konservative Lie-Tripel-Algebren.

1. Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen legen es nahe, die folgende Begriffsbildung zu definieren:

Definition 2.1. (a) $\mathcal{A}$ heißt schwach konservativ dann und nur dann, wenn $\text{Rad } \mathcal{A}$ kein Idempotent enthält und jede idempotente Restklasse von $\bar{\mathcal{A}}$ einen idempotenten Vertreter in $\mathcal{A}$ besitzt.

(b) $\mathcal{A}$ heißt konservativ dann und nur dann, wenn jede Unter- algebra von $\mathcal{A}$ schwach konservativ ist.

(c) $\mathcal{A}$ heißt strikt konservativ dann und nur dann, wenn jede aus $\mathcal{A}$ durch Grundkörpererweiterung entstehende Algebra konservativ ist.

Aus Lemma 1.1. geht hervor, daß die Forderung der schwachen Konservativität notwendig ist für das Bestehen einer Wedderburn-Zerlegung; des weiteren bedeutet sie, wie § 1, 3. lehrt, eine echte Einschränkung des Begriffs „Lie-Tripel-Algebra“. Jordan-Algebren hingegen sind stets sogar konservativ ([7]).

2. Im folgenden wollen wir zeigen, daß das Radikal einer konservativen Lie-Tripel-Algebra eine neue Beschreibung gestattet. Wir beweisen zunächst

Lemma 2.1. $\mathcal{Q}$ sei ein Ideal in $\mathcal{A}$, und $\text{Rad } \mathcal{A}$ enthalte kein Idempotent.

(a) Ist $\mathcal{A}$ schwach konservativ mit $\text{Rad } \mathcal{A} \subset \mathcal{Q}$, und enthält $\mathcal{Q}$ kein Idempotent, dann gilt sogar $\text{Rad } \mathcal{A} = \mathcal{Q}$.

(b) Ist $\mathcal{Q}$ schwach konservativ, so gilt $\text{Rad } \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \cap \text{Rad } \mathcal{A}$.

Beweis. $\mathcal{Q}^* := \mathcal{Q} / \text{Rad } \mathcal{A}$ ist ein Ideal in $\bar{\mathcal{A}}$. Die Annahme, es enthalte ein Idempotent $\bar{d}$ ($d \in \mathcal{Q}$), liefert ein Idempotent $c \in \mathcal{A}$ mit $\bar{c} = \bar{d}$ und danach wegen $\text{Rad } \mathcal{A} \subset \mathcal{Q}$ den Widerspruch

$c \in \mathfrak{Q}$. Folglich ist $\mathfrak{Q}^*$ ein Nilideal der halbeinfachen Jordan-Algebra $\overline{\mathfrak{A}}$ und daher Null. Das beweist (a).

(b) In I, Satz 5.4. wurde die Inklusion $\text{Rad } \mathfrak{Q} \subset \mathfrak{Q} \cap \text{Rad } \mathfrak{A}$ bewiesen. Die Umkehrung erbringt (a), angewendet auf $\mathfrak{Q}$, da $\mathfrak{Q} \cap \text{Rad } \mathfrak{A}$ ein Ideal in $\mathfrak{Q}$ ist und keine Idempotenten enthält.

Wir weisen an dieser Stelle darauf hin, daß sich die bisherigen Begriffsbildungen und Ergebnisse der beiden letzten Paragraphen in beliebigen Algebren sinnvoll darstellen lassen, was man den Definitionen und Beweisen ohne Mühe ansieht und was auch im folgenden gelegentlich der Fall sein wird. Aus systematischen Gründen verzichten wir jedoch darauf, dies im Text explizit hervorzuheben.

3. Gleichzeitig mit einer neuen Beschreibung des Radikals wollen wir die konservativen Lie-Tripel-Algebren auf andere Weise charakterisieren. Als Vorbereitung bringen wir

Lemma 2.2. Es sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra, die (1.1) erfüllt, und c ein Idempotent von $\mathfrak{A}$. Dann ist $\bar{c}$ ein solches von $\overline{\mathfrak{A}}$ mit

$$(2.1) \quad \overline{\mathfrak{A}}_{\lambda}(\bar{c}) = \mathfrak{A}_{\lambda}(c) + \text{Rad } \mathfrak{A} / \text{Rad } \mathfrak{A}$$

für $\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1$. Für $\lambda \in \{0, 1\}$ und schwach konservatives $\mathfrak{A}_{\lambda}(c)$ gilt ferner

$$(2.2) \quad \text{Rad } \mathfrak{A}_{\lambda}(c) = \mathfrak{A}_{\lambda}(c) \cap \text{Rad } \mathfrak{A},$$

$$(2.3) \quad \overline{\mathfrak{A}}_{\lambda}(\bar{c}) \cong \mathfrak{A}_{\lambda}(c) / \text{Rad } \mathfrak{A}_{\lambda}(c).$$

Die Isomorphie in (2.3) vermittelt z.B. die Abbildung

$$(u \in \mathfrak{A}_{\lambda}(c))$$

$$(2.4) \quad \bar{w}u := u + \text{Rad } \mathfrak{A}_{\lambda}(c).$$

Beweis. Sei im folgenden $\mathfrak{A}_{\lambda} := \mathfrak{A}_{\lambda}(c)$, $\overline{\mathfrak{A}}_{\lambda} := \overline{\mathfrak{A}}_{\lambda}(\bar{c})$ und

$u_{\lambda} := u_{\lambda}(c)$ für $\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1$ und $u \in \mathfrak{A}$. Nun sei $u = v_{\lambda} + w$

$\in \mathcal{A}_\lambda + \text{Rad } \mathcal{A}$ mit $v_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda$ und $w \in \text{Rad } \mathcal{A}$. Dann gilt auch $cw \in \text{Rad } \mathcal{A}$, und mit $cu = \lambda v_\lambda + cw$ wird $\overline{cu} = \lambda \overline{v_\lambda} = \lambda \overline{u}$ oder $\overline{u} \in \overline{\mathcal{A}}_\lambda(\overline{c})$. Umgekehrt sei dies der Fall, dann gilt

$$\overline{u} = \overline{u_1} + \overline{u_2} + \overline{u_0},$$

und I, (2.4) entnimmt man, daß $\overline{u}_\mu$ in $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ liegt für $\mu = 0, \frac{1}{2}, 1$. Folglich ist $u_\mu \in \text{Rad } \mathcal{A}$ für $\mu \neq \lambda$ und damit $u \in \mathcal{A}_\lambda + \text{Rad } \mathcal{A}$, wo - durch (2.1) bewiesen ist.

Daraus entsteht die Isomorphie ($\lambda \in \{0, 1\}$)

$$(2.5) \quad \overline{\mathcal{A}}_\lambda \cong \mathcal{A}_\lambda / \mathcal{A}_\lambda \cap \text{Rad } \mathcal{A}.$$

Hier ist bekanntlich die linke Seite halbeinfach ([1]), wo - raus die Richtung "c" in (2.2) folgt. Die Gleichheit ergibt dann Teil (a) von Lemma 2.1. Trägt man (2.2) in (2.5) ein, so entsteht (2.3). Daß W wohldefiniert ist und einen Isomorphis - mus darstellt, zeigt man nun leicht.

Satz 2.1. $\mathcal{A}$ sei eine konservative Lie-Tripel-Algebra über dem Körper K einer Charakteristik ungleich 2 und habe ein Eins - element e. Ist dann $\{\overline{d}_1, \dots, \overline{d}_m\}$ ein vollständiges Orthogo - nalsystem von Idempotenten in $\overline{\mathcal{A}}$, dann existiert ein voll - ständiges Orthogonalsystem $\{c_1, \dots, c_m\}$ von Idempotenten in $\mathcal{A}$ mit

$$\overline{c_i} = \overline{d_i} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Beweis. Wir schließen mit vollständiger Induktion nach m. Der Fall "m=1" ist trivial. Unter der Annahme, der Satz sei für m - 1 bewiesen, betrachten wir zu einem vollständigen Ortho - gonalsystem $\{\overline{d}_1, \dots, \overline{d}_m\}$ von Idempotenten in $\overline{\mathcal{A}}$ das Idempo - tent $\overline{d} := \overline{e} - \overline{d}_m$. Dazu existiert ein Idempotent $c \in \mathcal{A}$ mit $\overline{c} = \overline{d}$, und aus Orthogonalitätsgründen wird für $i = 1, \dots, m-1$:

$$\overline{cd_i} = \overline{d_i}, \quad \overline{d_i} = \overline{c}.$$

Daher ist $\{\overline{d_1}, \dots, \overline{d_{m-1}}\}$ ein vollständiges Orthogonalsystem von Idempotenten in $\overline{\mathcal{O}}_1(\overline{c})$, also $\{\overline{wd_1}, \dots, \overline{wd_{m-1}}\}$ ein solches in $\mathcal{O}_1(c)/\text{Rad } \mathcal{O}_1(c)$, wenn W den in Lemma 2.2. genannten Isomorphismus bezeichnet. Da $\mathcal{O}_1(c)$ konservativ ist, erbringt die Induktionsannahme ein vollständiges Orthogonalsystem $\{c_1, \dots, c_{m-1}\}$ von Idempotenten in $\mathcal{O}_1(c)$ mit

$$c_i + \text{Rad } \mathcal{O}_1(c) = \overline{wd_i} \quad (i = 1, \dots, m-1).$$

Hierauf wendet man W^{-1} an und bekommt nach (2.4):

$$\overline{c_i} = \overline{d_i} \quad (i = 1, \dots, m-1).$$

Nun wird $c_m := e - c$ ein Idempotent von $\mathcal{O}$ mit $\overline{c_m} = \overline{d_m}$, und I, Satz 2.1. weist $\{c_1, \dots, c_m\}$ als ein vollständiges Orthogonalsystem von Idempotenten in $\mathcal{O}$ aus.

4. Wir müssen noch die Frage diskutieren, wie sich die Begriffe der Definition 2.1. beim Übergang von $\mathcal{O}$ zu $\hat{\mathcal{O}}$ (vgl. § 0, 4.) transformieren. Es gilt

Satz 2.2. Es sei $\mathcal{O}$ eine Lie-Tripel-Algebra über einem Körper K der Charakteristik ungleich 2, die Algebra $\hat{\mathcal{O}}$ entstehe aus $\mathcal{O}$ durch Adjunktion eines Einselementes e . Ist $\mathcal{O}$ dann

- (a) schwach konservativ,
- (b) konservativ,
- (c) strikt konservativ,

so besteht die entsprechende Eigenschaft auch für $\hat{\mathcal{O}}$.

Beweis: Gemäß I, Satz 5.6. wissen wir, daß das Radikal von $\hat{\mathcal{O}}$ mit dem von $\mathcal{O}$ übereinstimmt.

(a) Sei $\mathcal{O}$ zunächst schwach konservativ. Die für $u \in \mathcal{O}$ und $\alpha \in K$ durch

$$(2.6) \quad V(\bar{u} + \alpha \bar{e}) := \bar{u} + \alpha e$$

definierte Abbildung V von $\bar{\hat{\mathcal{A}}} = \hat{\mathcal{A}}/\text{Rad } \hat{\mathcal{A}}$ in $\bar{\hat{\mathcal{A}}} = \bar{\mathcal{A}} + K\bar{e}$ ist offenbar ein Isomorphismus. Für ein Idempotent $\bar{d}$ in $\bar{\hat{\mathcal{A}}}$ wird daher $V\bar{d}$ ein solches von $\bar{\hat{\mathcal{A}}}$, und I, Lemma 2.3. gestattet die folgende Fallunterscheidung:

- 1) $V\bar{d} \in \bar{\mathcal{A}}$: Wegen (2.6) ist dann $V\bar{d} = \bar{d}$, und die schwache Konservativität von $\mathcal{A}$ liefert ein Idempotent $c \in \mathcal{A}$ mit $\bar{c} = \bar{d}$.
- 2) $V\bar{d} = \bar{e}$. Dann ist $\bar{d} = \bar{e}$.
- 3) Es existiert ein Idempotent $\bar{d}_1 \in \bar{\mathcal{A}}$ mit $V\bar{d} = \bar{e} - \bar{d}_1$. Wendet man hierauf V^{-1} an, so wird $\bar{d} = \bar{e} - \bar{d}_1 = \overline{e - c_1}$, wenn c_1 ein Idempotent in $\mathcal{A}$ mit $\bar{c}_1 = \bar{d}_1$ bezeichnet. Dann aber ist $e - c_1$ ein Idempotent in $\hat{\mathcal{A}}$.

Insgesamt ist also $\hat{\mathcal{A}}$ schwach konservativ.

(b) Nun sei $\mathcal{A}$ konservativ. Um dasselbe für $\hat{\mathcal{A}}$ nachzuweisen, genügt es, eine beliebige Unteralgebra $\mathcal{L}$ von $\hat{\mathcal{A}}$ zu betrachten und als schwach konservativ zu erkennen. O.E. können wir $\mathcal{L} \not\subset \mathcal{A}$ annehmen und bekommen dann

$$(2.7) \quad K\bar{e} \cong \hat{\mathcal{A}}/\mathcal{A} = \mathcal{A} + \mathcal{L}/\mathcal{A} \cong \mathcal{L}/\mathcal{L}_1$$

mit $\mathcal{L}_1 := \mathcal{A} \cap \mathcal{L}$. Da $K\bar{e}$ eine halbeinfache Jordan-Algebra ist, gewinnt man aus (2.7) die Inklusion $\text{Rad } \mathcal{L} \subset \mathcal{L}_1$. Als Teilalgebra von $\mathcal{A}$ ist $\mathcal{L}_1$ konservativ, weshalb Lemma 2.1.(b) die Relation

$$(2.8) \quad \text{Rad } \mathcal{L} = \text{Rad } \mathcal{L}_1$$

liefert. Gemäß (2.7) existiert nun offenbar eine Basis

$\{u_1, \dots, u_r\}$ von $\mathcal{L}_1$ und ein $u_{r+1} \in \mathcal{A}$, so daß $\{u_1, \dots, u_r, e - u_{r+1}\}$ eine Basis von $\mathcal{L}$ wird. Nun sind die folgenden Fälle denkbar:

- 1) $u_{r+1} \in \mathcal{L}_1$: Dann ist auch $\{u_1, \dots, u_r, e\}$ eine Basis von $\mathcal{L}$, also $\mathcal{L} = \hat{\mathcal{L}}$. Dann folgt die schwache Konservativität von $\mathcal{L}$ aus (a).

2) $u_{r+1} \notin \mathfrak{L}_1$: Wir behaupten, daß der Vektorraum

$$(2.9) \quad \mathfrak{L} := \langle \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}\} \rangle$$

eine Teilalgebra von $\mathfrak{A}$ ist. Es genügt zu zeigen, daß

$u_{r+1}u_i$ für $i = 1, \dots, r$ und u_{r+1}^2 zu $\mathfrak{L}$ gehört. Es gilt aber

$$(2.10) \quad u_{r+1}u_i = u_i - (e - u_{r+1})u_i \in \mathfrak{L}_1,$$

$$(2.11) \quad u_{r+1}^2 - u_{r+1} = (e - u_{r+1})^2 - (e - u_{r+1}) \in \mathfrak{L}_1.$$

Aus (2.11) folgt insbesondere, daß u_{r+1}^2 in $\mathfrak{L}$ liegt, womit

unsere Behauptung bewiesen ist. (2.10) weist $\mathfrak{L}_1$ überdies als Ideal in $\mathfrak{L}$ aus, die eindimensionale Faktoralgebra $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_1$

hat gemäß (2.11) das Einselement $u_{r+1} + \mathfrak{L}_1$ und ist daher halbeinfach. Daraus folgt $\text{Rad } \mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}_1$, und wiederum bringt

die Konservativität von $\mathfrak{L}_1$ die Gleichheit $\text{Rad } \mathfrak{L} = \text{Rad } \mathfrak{L}_1$,

mit (2.8) kommt daher insgesamt

$$(2.12) \quad \text{Rad } \mathfrak{L} = \text{Rad } \mathfrak{L}_1 = \text{Rad } \mathfrak{L} = \text{Rad } \hat{\mathfrak{L}} =: \kappa.$$

Außerdem gilt $\mathfrak{L} \subset \hat{\mathfrak{L}}$, und $\hat{\mathfrak{L}}$ ist gemäß (a) schwach konservativ.

Nun sei $d \in \mathfrak{L}$ und $d + \kappa \in \mathfrak{L}$ idempotent, dann ist $d + \kappa$ auch ein Idempotent in $\hat{\mathfrak{L}}$, folglich existiert ein Idempotent $c \in \hat{\mathfrak{L}}$ mit $c + \kappa = d + \kappa$, also $d - c \in \kappa$. Nun gilt

$$(2.13) \quad d = u + \alpha(e - u_{r+1}), \quad c = u' + \beta u_{r+1} + \gamma e$$

mit $u, u' \in \mathfrak{L}_1$ und $\alpha, \beta, \gamma \in K$. Die Differenz

$$d - c = u - u' + (\alpha - \gamma)e - (\alpha + \beta)u_{r+1}$$

gehört zu κ und daher insbesondere zu $\mathfrak{L}_1$. Durch Koeffizientenvergleich entsteht daraus $\alpha = \gamma = -\beta$ und danach $c \in \mathfrak{L}$ wegen (2.13). Somit ist $\mathfrak{L}$ schwach konservativ.

(c) Es sei $\mathfrak{A}$ strikt konservativ und $\tilde{K}$ eine Erweiterung von K . Die Isomorphie zwischen $\hat{\mathfrak{A}}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$ sichert nach (b) die Konservativität von $\tilde{\mathfrak{A}}$, und daraus folgt insgesamt die strikte Konservativität von $\hat{\mathfrak{A}}$.

5. Als Anwendung dieser Ergebnisse beweisen wir nun den Satz 2.3. Es sei $\mathcal{A}$ eine Lie-Tripel-Algebra über dem Körper K einer Charakteristik ungleich 2, deren Radikal kein Idempotent enthält. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $\mathcal{A}$ ist konservativ.

(b) Ist $\mathcal{B}$ eine Unter algebra von $\mathcal{A}$, so stimmt der Primitivgrad von $\mathcal{B}$ mit demjenigen von $\overline{\mathcal{B}}$ ($= \mathcal{B}/\text{Rad } \mathcal{B}$) überein.

(c) Ist $\mathcal{B}$ eine Unter algebra von $\mathcal{A}$, dann besitzt jedes Ideal von $\mathcal{B}$, das $\text{Rad } \mathcal{B}$ echt umfaßt, ein Idempotent.

Ist eine dieser Aussagen erfüllt, so gilt

(2.14) $\text{Rad } \mathcal{A} = \bigcup \{ \mathcal{Q}; \mathcal{Q} \text{ Ideal in } \mathcal{A}, \mathcal{Q} \text{ enthält kein Idempotent.} \}$

Beweis. Aus (a) folgt (b) unter Beachtung von Satz 2.1. und der Tatsache, daß mit c auch $\bar{c}$ idempotent und mit $\mathcal{A}$ auch jede Unter algebra $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ konservativ ist. Denn wegen Satz 2.2. ist dann auch $\hat{\mathcal{B}}$ konservativ, da aber $\text{Rad } \mathcal{B} = \text{Rad } \hat{\mathcal{B}}$ kein Idempotent enthält und Satz 2.1. gilt, stimmen die Primitivgrade von $\hat{\mathcal{B}}$ und $\overline{\hat{\mathcal{B}}}$, also aus Isomorphiegründen auch die von $\hat{\mathcal{B}}$ und $\overline{\mathcal{B}}$ überein. Danach folgt (b) aus I, (2.11). Noch einfacher gewinnt man (c) aus (a) vermöge Lemma 2.1. Schließlich ist in (2.14) die Inklusion „ $\subset$ “ trivial. Zum Beweis der Umkehrung sei $\mathcal{Q}$ ein Ideal in $\mathcal{A}$, das kein Idempotent enthält. $\mathcal{Q}$ ist konservativ, weshalb wir beide Teile von Lemma 2.1. verwenden dürfen. Damit wird

$$\mathcal{Q} = \text{Rad } \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \cap \text{Rad } \mathcal{A},$$

also $\mathcal{Q} \subset \text{Rad } \mathcal{A}$, womit (2.14) bewiesen ist.

Somit brauchen wir nur noch zu zeigen, daß (a) aus der Aussage „(b) oder (c)“ folgt. Wir schließen indirekt und

nehmen an, $\mathcal{A}$ sei nicht konservativ. Dann existiert eine Unter-
algebra von $\mathcal{A}$, die nicht schwach konservativ ist. Sei $\mathcal{B}$
eine solche kleinster Dimension und $\bar{d} \in \bar{\mathcal{B}}$ idempotent. Dann
ist $K_1[\bar{d}] = K\bar{d}$ eine halbeinfache Unter- $\mathcal{B}$, und es
existiert eine Unter- $\mathcal{B}$ $\mathcal{B}_1$ von $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}_1/\text{Rad } \mathcal{B}_1 = K\bar{d}$.
Hieraus folgt

$$(2.15) \quad \text{Rad } \mathcal{B}_1 \subset \text{Rad } \mathcal{B}.$$

Nun bestehen zwei Möglichkeiten:

1) $K\bar{d} \subsetneq \mathcal{B}$: Dann ist auch $\mathcal{B}_1 \subsetneq \mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ also wegen der Mini-
malbedingung konservativ. Deshalb erlaubt (2.15) die Ver-
schärfung $\text{Rad } \mathcal{B}_1 = \text{Rad } \mathcal{B}$, und nun muß es wegen $K\bar{d} = \overline{\mathcal{B}_1}$ ein
Idempotent $c \in \mathcal{B}_1$ geben mit $\bar{c} = \bar{d}$.

2) $K\bar{d} = \overline{\mathcal{B}}$, also $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$: Nun wollen wir zeigen, daß $\mathcal{B}$ ein
Idempotent c besitzt. Ist (b) erfüllt, so gilt dies wegen
 $\text{PrGr } K\bar{d} = 1$. Besteht hingegen (c), so gilt dies wegen
 $\text{Rad } \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{B}$. Also besitzt $\mathcal{B}$ ein Idempotent c , $\bar{c}$ ist dann
ein solches der primären Algebra $\overline{\mathcal{B}}$, und daher gilt $\bar{c} = \bar{d}$.

Stets hat also $\bar{d}$ einen idempotenten Vertreter in $\mathcal{B}$, und
da $\bar{d}$ beliebig gewählt war, widerspricht dies der Annahme, $\mathcal{B}$
sei nicht schwach konservativ.

6. Im folgenden werden wir gelegentlich Grundkörpererwei-
terungen der Algebra $\mathcal{A}$ vornehmen müssen. Diese haben ihren
gewünschten Zweck jedoch nur dann, wenn man genau verfolgen
kann, wie sich das Radikal von $\mathcal{A}$ dabei verändert. Doch nicht
einmal für Jordan-Algebren läßt sich darüber etwas Allgemein-
verbindliches aussagen. Nimmt man jedoch zusätzlich an, die
Faktor-Algebra der Jordan-Algebra $\mathcal{A}$ nach ihrem Radikal sei
separabel, so zeigt sich, daß jede Körpererweiterung von

$\text{Rad } \mathfrak{A}$ mit dem Radikal der entsprechenden Erweiterung von $\mathfrak{A}$ übereinstimmt ([1]).

Üblicherweise nennt man dabei eine Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ über dem Körper K separabel, wenn jede aus $\mathfrak{A}$ durch Grundkörper - erweiterung entstehende Algebra halbeinfach ist. Bekanntlich bedeutet die Separabilität eine echte Einschränkung des Begriffes „halbeinfach“, aber über einem algebraisch abgeschlossenen Körper oder einem Körper der Charakteristik 0 ist jede halbeinfache Jordan-Algebra separabel ([1]). Nun beweisen wir

Satz 2.4. Es sei $\mathfrak{A}$ eine strikt konservative Lie-Tripel-Algebra über einem Körper K der Charakteristik ungleich 2,3 und $\bar{\mathfrak{A}}$ separabel. Dann gilt

$$(2.16) \quad \text{Rad } \mathfrak{A}_L = (\text{Rad } \mathfrak{A})_L$$

für jede Körpererweiterung L von K .

Beweis. Als Abkürzungen verwenden wir $\text{Rad}_L \mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{q}_L(\mathfrak{A})$ für $(\text{Rad } \mathfrak{A})_L$ bzw. $(\mathfrak{q}(\mathfrak{A}))_L$. Aus der Separabilität von $\bar{\mathfrak{A}}$ und der Isomorphie $\bar{\mathfrak{A}}_L \cong \mathfrak{A}_L / \text{Rad}_L \mathfrak{A}$ gewinnt man die Halbeinfachheit von $\mathfrak{A}_L / \text{Rad}_L \mathfrak{A}$ und damit

$$(2.17) \quad \text{Rad } \mathfrak{A}_L \subset \text{Rad}_L \mathfrak{A}.$$

Daß sich (2.17) zu einer Gleichung verschärfen läßt, ergibt sich nun in mehreren Schritten:

1) Sei π der natürliche Homomorphismus $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} / \mathfrak{q}(\mathfrak{A})$ und $\mathcal{L}$ eine Unter algebra von $\mathfrak{A} / \mathfrak{q}(\mathfrak{A})$. Dann bestätigt man mit $\mathfrak{L} := \pi^{-1}(\mathcal{L})$ sofort die Gültigkeit von

$$(2.18) \quad \mathfrak{L}_L \subset \pi^{-1}(\mathcal{L}_L),$$

wenn die lineare Fortsetzung von π auf $\mathfrak{A}_L$ ebenfalls mit π bezeichnet wird.

2) Bekanntlich existiert ein kanonischer Isomorphismus

$\pi_L: (\mathcal{A}/\mathfrak{q}(\mathcal{A}))_L \rightarrow \mathcal{A}_L/\mathfrak{q}_L(\mathcal{A})$, der für $u \in \mathcal{A}$ dem Element $u + \mathfrak{q}(\mathcal{A})$ den Wert $u + \mathfrak{q}_L(\mathcal{A})$ erteilt und dann durch lineare Fortsetzung definiert wird. Bezeichnet dann π_L den kanonischen Homomorphismus $\mathcal{A}_L \rightarrow \mathcal{A}_L/\mathfrak{q}_L(\mathcal{A})$, so gilt offenbar $\pi_L \circ \pi = \pi_L$, und für ein Ideal $\mathfrak{A}$ von $\mathcal{A}$ erhält man

$$(2.19) \quad \pi^{-1}(\mathfrak{A}_L) = \pi_L^{-1}(\pi_L \mathfrak{A}_L).$$

3) Nun beachte man, daß das Radikal von $\mathcal{A}/\mathfrak{q}(\mathcal{A})$ gemäß I, (5.6b) mit $\text{Rad } \mathcal{A}/\mathfrak{q}(\mathcal{A})$ übereinstimmt und daher $\overline{\mathcal{A}/\mathfrak{q}(\mathcal{A})}$ zu $\overline{\mathcal{A}}$ isomorph, also separabel ist. Somit gilt (2.16) für die Jordan-Algebra $\mathcal{A}/\mathfrak{q}(\mathcal{A})$ an Stelle von $\mathcal{A}$, und mit (2.18), (2.19) und I, (5.6a) entsteht:

$$\begin{aligned} \text{Rad}_L \mathcal{A} &\subset \pi^{-1}(\text{Rad}_L \mathcal{A}/\mathfrak{q}(\mathcal{A})) = \pi_L^{-1}(\pi_L \text{Rad}_L \mathcal{A}/\mathfrak{q}(\mathcal{A})) = \\ &= \pi_L^{-1}(\pi_L \text{Rad}(\mathcal{A}/\mathfrak{q}(\mathcal{A}))_L) = \pi_L^{-1}(\text{Rad } \mathcal{A}_L/\mathfrak{q}_L(\mathcal{A})) . \end{aligned}$$

Daraus aber folgt

$$(2.20) \quad \text{Rad}_L \mathcal{A} \subset \{u; u \in \mathcal{A}_L, \text{ es gibt ein } m \in \mathbb{N} : \\ u^m, (uv)^m \in \mathfrak{q}_L(\mathcal{A}) \text{ für alle } v \in \mathcal{A}_L\}.$$

Nun sei $c \in \mathcal{A}_L$ idempotent, dann existiert gemäß I, Lemma 2.2. eine Darstellung

$$(2.21) \quad c = \sum_{i=1}^r c_i$$

mit paarweise orthogonalen absolut primitiven Idempotenten c_i , die einer Grundkörpererweiterung $\mathcal{A}_M$ von $\mathcal{A}_L$ angehören. Auf $\mathcal{A}_L$ definieren wir nun eine (von c abhängige) Linearform λ durch ($u \in \mathcal{A}_L$, $\bar{u} := u + \text{Rad } \mathcal{A}_M$, wo M' den algebraischen Abschluß von M bezeichnet):

$$(2.22) \quad \lambda(u) := \text{RS } \frac{\quad}{\mathcal{A}_M} (\bar{u}).$$

Ersichtlich ist λ assoziativ. Für $i = 1, \dots, r$ ist c_i absolut primitiv, also insbesondere primitiv in $\mathcal{A}_M$. Wendet man da-

her Satz 2.3. auf die konservative Lie-Tripel-Algebra $\mathfrak{a}_M$, an, so wird unter Berücksichtigung von Lemma 2.2.:

$$\begin{aligned} \text{PrGr } \overline{\mathfrak{a}_{M,1}}(\overline{c_i}) &= \text{PrGr}[\mathfrak{a}_{M,1}(c_i)/\text{Rad}\mathfrak{a}_{M,1}(c_i)] \\ &= \text{PrGr } \mathfrak{a}_{M,1}(c_i) = 1. \end{aligned}$$

Folglich ist $\overline{c_i}$ primitiv in $\overline{\mathfrak{a}_M}$, also wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von M' absolut primitiv ([1]). Danach wird mit (2.21) für $i = 1$:

$$\chi(cc_1) = \chi(c_1) = \text{RS}_{\overline{\mathfrak{a}_M}}(\overline{c_1}) = 1,$$

weshalb c nicht zu $\text{Bk}_\chi(\mathfrak{a}_M)$ gehören kann. Erst recht gilt damit $c \notin \text{Bk}(\mathfrak{a}_L)$. Da nun $\mathfrak{a}/\text{Bk}_\chi(\mathfrak{a})$ gemäß I, Satz 4.1. eine Jordan-Algebra ist, gilt $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}) \subset \text{Bk}_\chi(\mathfrak{a})$, folglich $\mathfrak{q}_L(\mathfrak{a}) \subset (\text{Bk}_\chi(\mathfrak{a}))_L \subset \text{Bk}_\chi(\mathfrak{a}_L)$, und man hat $c \notin \mathfrak{q}_L(\mathfrak{a})$.

Nun würde die Annahme, c liege in $\text{Rad}_L \mathfrak{a}$, gemäß (2.20) eine Potenz von c , also c selber, als Element von $\mathfrak{q}_L(\mathfrak{a})$ ausweisen, was nicht möglich ist. Daher besitzt $\text{Rad}_L \mathfrak{a}$ kein Idempotent, und (2.14) in Verbindung mit (2.17) bringt (2.16).

Wir bemerken noch, daß man das Verfahren, dessen wir uns gerade bedient haben, auch anwenden kann, um zu zeigen, daß die strikt konservativen Lie-Tripel-Algebren eigentlich sind im Sinne von I, §5,4. Darauf wollen wir jedoch nicht ausführlicher eingehen.

§ 3. Einige Hilfssätze.

1. $\mathfrak{A}$ sei bis auf weiteres eine Lie-Tripel-Algebra mit Einselement e über einem Körper K der Charakteristik ungleich 2, und $\{c_1, \dots, c_r\}$ sei ein vollständiges Orthogonalsystem von Idempotenten in $\mathfrak{A}$, zu dem im Sinne von I, Satz 2.2. die Peirce-Zerlegung $\mathfrak{A} = \sum_{i,j} \mathfrak{A}_{ij}$ gehöre. Auch für ähnliche Situationen in späteren Abschnitten wollen wir die verbindliche Regelung einführen, durch $i, j, \dots$ Zahlen aus $\{1, \dots, r\}$ und $u_{ij}, v_{ij}, \dots$ Elemente des Vektorraumes $\mathfrak{A}_{ij}$ zu benennen.

Lemma 3.1. (a) Es seien i, j, l und i, k, l untereinander paarweise verschieden, dann ist

$$(3.1) \quad (u_{ij}v_{ik})w_{kl} = u_{ij}(v_{ik}w_{kl}) + v_{ik}(u_{ij}w_{kl}).$$

(b) Für paarweise verschiedene i, j, k wird

$$(3.2) \quad (u_{ij}v_{ik})w_{jk} = [u_{ij}(v_{ik}w_{jk})]_{jj} + [v_{ik}(u_{ij}w_{jk})]_{kk}.$$

$$(3.3) \quad [u_{ij}(v_{ik}w_{jk})]_{ii} = [v_{ik}(u_{ij}w_{jk})]_{ii}.$$

Beweis. Man setze I, (1.3) an für $u := c_i$, $w := u_{ij}$, $v := v_{ik}$, $y := w_{kl}$. Dabei sei $i \neq j, k, l$ und $k \neq l$. Dann wird unter Berücksichtigung von I, Satz 2.2. (f):

$$(3.4) \quad \frac{1}{2}(u_{ij}v_{ik})w_{kl} = \frac{1}{2}u_{ij}(v_{ik}w_{kl}) + v_{ik}(c_i(u_{ij}w_{kl})) - c_i(v_{ik}(u_{ij}w_{kl})).$$

Nun sind die folgenden Fälle denkbar:

1) $j \neq l$; (a) $j = k$. Dann verschwindet in (3.4) auf der rechten Seite der letzte Summand, und es entsteht (3.1) für $j = k$.

(b) $j \neq k$. Dann folgt offenbar (3.1) für $j \neq k$.

2) $j = l$. Dann geht (3.4) über in

$$(3.5) \quad (u_{ij}v_{ik})w_{kj} = u_{ij}(v_{ik}w_{kj}) + v_{ik}(u_{ij}w_{kj}) - 2[v_{ik}(u_{ij}w_{kj})]_{ii},$$

wo mit der linken auch die rechte Seite zu $\mathfrak{A}_{jj} + \mathfrak{A}_{kk}$ ge-

hört. Dort müssen sich also die in $\mathcal{Q}_{1,1}$ liegenden Bestandteile kompensieren, und das bringt (3.3) (3.3) zusammen mit (3.5) aber erzwingt (3.2).

Es ist nützlich, einige Spezialfälle von Lemma 3.1. (a) gesondert zu notieren. In der dortigen Bezeichnung wird

(A) für $k = j$ und $l = :k$:

$$(3.6) \quad (u_{ij} v_{ij}) w_{jk} = u_{ij} (v_{ij} w_{jk}) - v_{ij} (u_{ij} w_{jk}).$$

Der Spezialfall $u_{ij} = v_{ij}$ ergibt

$$(3.7) \quad u_{ij}^2 w_{jk} = 2u_{ij} (u_{ij} w_{jk}).$$

Schließlich folgt aus (3.6):

$$(3.8) \quad u_{ij} (v_{ij} w_{jk}) = -v_{ij} (u_{ij} w_{jk}),$$

wenn $u_{ij} v_{ij} = 0$ gilt.

(B) für $k \neq j$ wegen $u_{ij} w_{kl} = 0$

$$(3.9) \quad (u_{ij} v_{ik}) w_{kl} = u_{ij} (v_{ik} w_{kl}).$$

2. Nun sei $\mathcal{A}$ eine schwach konservative Lie-Tripel-Algebra mit Einselement e über K . Wir beweisen

Lemma 3.2. Es sei $u \in \mathcal{A}$ mit $\bar{u}^2 = \bar{e}$. Dann existiert ein $v \in \mathcal{A}$ mit $\bar{v} = \bar{u}$ und $v^2 = e$.

Beweis. Mit $\bar{u} := \frac{1}{2}(e-u)$ wird $\bar{u}^2 = \bar{e}$, und die schwache Konservativität von $\mathcal{A}$ liefert ein $c \in \mathcal{A}$ mit $c^2 = c$ und $\bar{c} = \bar{1}$.

Setzt man $v := e - 2c$, so wird $\bar{v} = \bar{u}$ und

$$v^2 = e + 4c - 4c = e.$$

Lemma 3.3. Es sei $(\text{Rad } \mathcal{A})^2 = 0$, und für vorgegebene $u_1, u_2 \in \mathcal{A}$ gelte $u_1^2 = u_2^2 = e$ sowie $u_1, u_2 \in \text{Rad } \mathcal{A}$. Setzt man dann

$u_3 := u_2 - u_1(u_1 u_2)$, so wird

$$\bar{u}_3 = \bar{u}_2, \quad u_3^2 = e, \quad u_1 u_3 = 0.$$

Beweis. Mit $\bar{u} := 1,2$ erhält man wegen $u_1^2 = u_2^2$ und 1, (1.7)*:

$$(3.10) \quad L(u_1) = L^3(u_1).$$

Daher wird $u_1 u_3 = u_1 u_2 - u_1(u_1(u_1 u_2)) = 0$. Da man trivialerweise $\overline{u_3} = \overline{u_2}$ hat, bleibt nur noch die Gültigkeit von $u_3^2 = e$ nachzuweisen. Wegen $(\text{Rad } \mathcal{A})^2 = 0$ bekommt man zunächst:

$$(3.11) \quad u_3^2 = e - 2u_2(u_1(u_1 u_2)).$$

Setzt man nun $u = w = u_1$ und $v = y = u_2$ in I, (1.3), so entsteht

$$(3.12) \quad u_1(u_2(u_1 u_2)) = u_2(u_1(u_1 u_2)).$$

Nun setzen wir $v = w = u_2$, $u = u_1$ und $y = u_1 u_2$ in I, (1.3).

Dann ergibt sich

$$u_1(u_1 u_2) - [u_2(u_1 u_2)](u_1 u_2) = u_1(u_2(u_2(u_1 u_2))) - 2u_2(u_1(u_2(u_1 u_2))) + u_2(u_2(u_1(u_1 u_2))).$$

Hier verwende man (3.10), (3.12) und " $(\text{Rad } \mathcal{A})^2 = 0$ ", dann wird $u_2(u_2(u_1(u_1 u_2))) = 0$. Multiplikation mit u_2 und erneute Berücksichtigung von (3.10) bringt $u_2(u_1(u_1 u_2)) = 0$. Daraus aber folgt $u_3^2 = e$ gemäß (3.11).

Lemma 3.4. Es sei $(\text{Rad } \mathcal{A})^2 = 0$; für die Elemente $u_1, \dots, u_r \in \mathcal{A}$ und $i, j = 1, \dots, r$ sei $\overline{u_i} \overline{u_j} = \delta_{ij} \overline{e}$. Es seien $e_1, \dots, e_k \in \mathcal{A}$ ($0 \leq k \leq r$), so daß $\overline{e_i} = \overline{u_i}$ und $e_i e_j = \delta_{ij} e$ für $i, j = 1, \dots, k$ gilt. Dann gibt es $e_{k+1}, \dots, e_r \in \mathcal{A}$ mit $\overline{e_i} = \overline{u_i}$ und $e_i e_j = \delta_{ij} e$ für $i, j = 1, \dots, r$.

Beweis. Wir schließen mit Induktion nach r .

1) $r = 1$: Vergleiche Lemma 3.2.

2) $r \rightarrow r+1$: Wir nehmen an, das Lemma sei bis r bewiesen, und seine Voraussetzungen seien erfüllt für $r+1$ an Stelle von r . O.E. können wir $k \leq r$ annehmen; dann gibt es nach der Induktionsannahme gewisse $e_{k+1}, \dots, e_r \in \mathcal{A}$ mit

$$(3.13) \quad \overline{e_i} = \overline{u_i}, \quad e_i e_j = \delta_{ij} e$$

für $i, j = 1, \dots, r$. Wir behaupten nun:

Zu $l \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq l \leq r$ gibt es ein $v_l \in \mathcal{A}$ mit $\overline{v_l} = \overline{u_{r+1}}$, $v_l^2 = e$ und $v_l e_i = 0$ für $i = 1, \dots, l$.

Im Falle $l = 1$ gibt es gemäß Lemma 3.2. ein $v \in \mathcal{A}$ mit $v^2 = e$ und $\overline{v} = \overline{u_{r+1}}$. Wegen $\overline{u_1} \overline{u_{r+1}} = \overline{0}$ wird dann $e_1 v \in \text{Rad } \mathcal{A}$; setzt man daher $v_1 := v - e_1(e_1 v)$, so gibt das Lemma 3.3.: $\overline{v_1} = \overline{u_{r+1}}$, $v_1^2 = e$, $v_1 e_1 = 0$

Ist die Behauptung bis l bewiesen ($l \leq r-1$), dann gibt es $v_l \in \mathcal{A}$ mit ($i = 1, \dots, l$)

$$(3.14) \quad \overline{v_l} = \overline{u_{r+1}}, \quad v_l^2 = e, \quad v_l e_i = 0.$$

Nun setze man $v_{l+1} := v_l - e_{l+1}(e_{l+1} v_l)$. Dann sieht man wie im Falle $l = 1$, daß $\overline{v_{l+1}} = \overline{u_{r+1}}$, $v_{l+1}^2 = e$, $v_{l+1} e_{l+1} = 0$ gilt. Mit $u = v_l$, $v = e_{l+1}$, $w = e_i$ ($1 \leq i \leq l$), $y = e_{l+1}$ in I, (1.3) wird nun gemäß (3.13), (3.14):

$$e_i(e_{l+1}(v_l e_{l+1})) = 0.$$

Berücksichtigt man dies in der Definition von v_{l+1} , so folgt $v_{l+1} e_i = 0$, womit die Behauptung bewiesen ist. Setzt man nun $e_{r+1} := v_r$, so erhält man das Lemma.

3. Als Anwendung dieser Hilfssätze bringen wir nun

Lemma 3.5. Es sei $\mathcal{A}$ eine konservative Lie-Tripel-Algebra mit Einselement e über K und $(\text{Rad } \mathcal{A})^2 = 0$. $\{c_1, \dots, c_r\}$ sei ein vollständiges Orthogonalsystem von Idempotenten in $\mathcal{A}$ mit den Peirce-Zerlegungen $\mathcal{A} = \sum_{i,j} \mathcal{A}_{ij}$, $\overline{\mathcal{A}} = \sum_{i,j} \overline{\mathcal{A}}_{ij}$, letztere bezüglich $\{\overline{c_1}, \dots, \overline{c_r}\}$. Es sei $1 \leq i, j \leq r$ und $\overline{u_\alpha} \in \overline{\mathcal{A}}_{ij}$ für $\alpha = 1, \dots, s$ mit $\overline{u_\alpha} \overline{u_\beta} = \delta_{\alpha\beta}(\overline{c_i} + \overline{c_j})$ für $\alpha, \beta = 1, \dots, s$. Es sei ferner $0 \leq k \leq s$, und zu $\alpha = 1, \dots, k$ gebe es $v_\alpha \in \mathcal{A}_{ij}$ mit $\overline{v_\alpha} = \overline{u_\alpha}$ sowie $v_\alpha v_\beta = \delta_{\alpha\beta}(c_i + c_j)$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, k$). Dann gibt es $v_{k+1}, \dots, v_s \in \mathcal{A}_{ij}$ mit $\overline{v_\alpha} = \overline{u_\alpha}$ und $v_\alpha v_\beta = \delta_{\alpha\beta}(c_i + c_j)$ für $\alpha, \beta = 1, \dots, s$.

Beweis. $c := c_i + c_j$ ist ein Idempotent in $\mathcal{O}_1$, für das gemäß I, Satz 2.2. gilt:

$$\mathcal{O}_1(c) = \mathcal{O}_{ii} + \mathcal{O}_{ij} + \mathcal{O}_{jj}, \quad \bar{\mathcal{O}}_1(\bar{c}) = \bar{\mathcal{O}}_{ii} + \bar{\mathcal{O}}_{ij} + \bar{\mathcal{O}}_{jj}.$$

Bezeichnet nun W den in (2.4) definierten Isomorphismus, dann erhält man für $\alpha, \beta = 1, \dots, s$:

$$W\bar{u}_\alpha W\bar{u}_\beta = \delta_{\alpha\beta} W\bar{c},$$

und $W\bar{c}$ ist das Einselement von $\mathcal{O}_1(c) / \text{Rad } \mathcal{O}_1(c)$. Für

$\alpha = 1, \dots, k$ gilt nun $v_\alpha \in \mathcal{O}_1(c)$, und aus $\bar{v}_\alpha = \bar{u}_\alpha$ entsteht durch Anwendung von W : $v_\alpha + \text{Rad } \mathcal{O}_1(c) = W\bar{u}_\alpha$. Da $\mathcal{O}_1(c)$ konservativ ist, bringt Lemma 3.4. also gewisse $w_{k+1}, \dots, w_r \in \mathcal{O}_1(c)$ mit

$$(3.15) \quad w_\alpha + \text{Rad } \mathcal{O}_1(c) = W\bar{u}_\alpha, \quad w_\alpha w_\beta = \delta_{\alpha\beta} (c_i + c_j)$$

für $\alpha, \beta = k+1, \dots, s$ und

$$(3.16) \quad w_\alpha v_\beta = 0$$

für $\alpha = k+1, \dots, s$; $\beta = 1, \dots, k$. Wendet man auf den ersten Teil von (3.15) W^{-1} an, so entsteht für $\alpha = k+1, \dots, s$:

$$(3.17) \quad \bar{w}_\alpha = \bar{u}_\alpha.$$

Für ein solches α besteht eine Darstellung der Gestalt

$$(3.18) \quad w_\alpha = w_{\alpha ii} + w_{\alpha ij} + w_{\alpha jj}$$

mit $w_{\alpha lm} \in \mathcal{O}_{lm}$. Da dann $\bar{w}_{\alpha lm}$ zu $\bar{\mathcal{O}}_{lm}$ gehört, andererseits gemäß (3.17) das Element $\bar{w}_\alpha$ in $\bar{\mathcal{O}}_{ij}$ liegt, muß $w_{\alpha ii}, w_{\alpha jj} \in \text{Rad } \mathcal{O}$ gelten, und wegen $(\text{Rad } \mathcal{O})^2 = 0$ ermöglicht dies

$$(3.19) \quad w_{\alpha ii}^2 = w_{\alpha jj}^2 = 0.$$

Danach wird mit $v_\alpha := w_{\alpha ij} \in \mathcal{O}_{ij}$:

$$(3.20) \quad c_i + c_j = w_\alpha^2 = v_\alpha^2 + 2v_\alpha(w_{\alpha ii} + w_{\alpha jj}).$$

Hier muß insbesondere mit der linken auch die rechte Seite zu $\mathcal{O}_{ii} + \mathcal{O}_{jj}$ gehören und daher deren zweiter Summand verschwinden. Somit wird ($\alpha = k+1, \dots, s$)

$$(3.21) \quad v_{\alpha}^2 = c_i + c_j, \quad v_{\alpha} \in \mathcal{A}_{ij}, \quad \overline{v_{\alpha}} = \overline{u_{\alpha}}.$$

Wir behaupten nun:

Ist $h = h_{ii} + h_{ij} + h_{jj} \in \mathcal{A}_{ii} + \mathcal{A}_{ij} + \mathcal{A}_{jj}$ und $h_{ii}, h_{jj} \in \text{Rad } \mathcal{A}$ sowie $w_{\alpha} h = 0$, dann gilt $v_{\alpha} h_{ij} = 0$.

Denn mit $h_{ii}^2 = h_{jj}^2 = 0$ erhält man

$$0 = (w_{\alpha ii} + w_{\alpha jj})(h_{ii} + h_{jj}) + v_{\alpha}(h_{ii} + h_{jj}) + h_{ij}(w_{\alpha ii} + w_{\alpha jj}) + v_{\alpha} h_{ij}.$$

Daraus folgt:

$$v_{\alpha} h_{ij} = -v_{\alpha}(h_{ii} + h_{jj}) - h_{ij}(w_{\alpha ii} + w_{\alpha jj}).$$

Da hier die linke Seite in $\mathcal{A}_{ii} + \mathcal{A}_{jj}$, die rechte hingegen in $\mathcal{A}_{ij}$ liegt, müssen beide verschwinden, und die Behauptung ist bewiesen.

Sei nun $1 \leq \beta \leq k$, dann ist $w_{\alpha} v_{\beta} = 0$ nach (3.16), und mit $h = v_{\beta} \in \mathcal{A}_{ij}$ folgt $v_{\alpha} v_{\beta} = 0$. Wenn aber $k+1 \leq \beta \leq s$, $\beta \neq \alpha$ gilt, dann setze man $h = w_{\beta}$, und aus $w_{\alpha} w_{\beta} = 0$ folgt $v_{\alpha} h_{ij} = v_{\alpha} v_{\beta} = 0$, womit das Lemma bewiesen ist.

§ 4. Ein wichtiger Spezialfall.

1. Es sei $\mathcal{L}$ eine Algebra über K . Unter einer Involution von $\mathcal{L}$ verstehen wir eine lineare Transformation $u \rightarrow \bar{u}$ von $\mathcal{L}$ in sich, die bezüglich der Multiplikation von $\mathcal{L}$ einen Anti-Homomorphismus darstellt und die Periode 2 hat. Das bedeutet insgesamt $(u, v \in \mathcal{L})$

$$(4.1) \quad \overline{uv} = \bar{v} \bar{u}, \quad \bar{\bar{u}} = u.$$

Ist in $\mathcal{L}$ eine solche Involution gegeben und r eine natürliche Zahl, so kann man den Vektorraum aller r -reihig-quadratischen Matrizen $\underline{u} = (u_{ij})$ mit $u_{ij} \in \mathcal{L}$ und $\overline{u_{ij}} = u_{ji}$, also aller hermiteschen Matrizen bezüglich der Involution von $\mathcal{L}$, betrachten. Dieser Vektorraum ist stabil unter der Multiplikation

$$\underline{u} \circ \underline{v} := \frac{1}{2}(\underline{uv} + \underline{vu}) = \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^r (u_{ik} v_{kj} + v_{ik} u_{kj}) \right),$$

wird also dadurch zu einer kommutativen Algebra über K , die wir mit $\mathcal{G}_r(\mathcal{L})$ bezeichnen. Es ist klar, wie man aus einer Basis von $\mathcal{L}$ über K eine solche von $\mathcal{G}_r(\mathcal{L})$ über K gewinnen kann.

2. Ziel dieses Paragraphen ist der folgende

Satz 4.1. Es sei $\mathcal{A}$ eine konservative Lie-Tripel-Algebra mit Einselement e über dem algebraisch abgeschlossenen Körper K einer Charakteristik ungleich 2; ferner sei $\bar{\mathcal{A}}$ einfach und $(\text{Rad } \mathcal{A})^2 = 0$. Dann erfüllt $\mathcal{A}$ den Satz von Wedderburn.

Beweis. Gemäß Lemma 1.1. genügt es, eine zu $\bar{\mathcal{A}}$ isomorphe Unteralgebra von $\mathcal{A}$ zu konstruieren. Wir werden im folgenden von einer Basis $\bar{B}$ der Algebra $\bar{\mathcal{A}}$ ausgehen und zu jedem Basis-element in geeigneter Weise genau einen Repräsentanten in $\mathcal{A}$ aufsuchen. Die Menge aller so entstehenden Repräsentaten,

welche wir B nennen wollen, ist dann offenbar linear unabhängig über K . Die Konstruktion von B wird nun so erfolgen, daß sich das Produkt zweier Elemente aus B in genau derselben Weise als lineares Kompositum von Elementen in B darstellen läßt, wie es in $\bar{B}$ für die zugehörigen Restklassen bereits der Fall ist. Dann aber wird der von B in $\mathcal{A}$ erzeugte Vektorraum eine zu $\bar{\mathcal{A}}$ isomorphe Unter algebra von $\mathcal{A}$.

Wir bedienen uns im folgenden der von M. KOECHER in [1], X, § 3 vorgelegten Klassifikation der einfachen Jordan-Algebren über algebraisch-abgeschlossenem Grundkörper. Es sei nun $r := \text{Gr } \bar{\mathcal{A}}$, dann sind die folgenden Fälle denkbar:

I. $r = 1$: Dann ist notwendig $\bar{\mathcal{A}} = K\bar{e}$, und Ke ist eine Unter algebra von $\mathcal{A}$, die zu $\bar{\mathcal{A}}$ isomorph ist.

II. $r = 2$: Dann gilt $\mathcal{A} = [X; \mu, e]$ mit einem Vektorraum X über K der Dimension $n \geq 3$ und einer bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten nicht-ausgearteten Bilinearform μ mit Werten in K . Gemäß [7] gibt es dann eine Basis $\{\bar{e}, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_s\}$ von $\bar{\mathcal{A}}$ mit $(i, j = 1, \dots, s)$

$$(4.2) \quad \bar{e} \bar{u}_1 = \bar{u}_1, \quad \bar{u}_i \bar{u}_j = \delta_{ij} \bar{e}.$$

Wir verwenden Lemma 3.4. für den Fall $k = 0$ und gewinnen

$e_1, \dots, e_s \in \mathcal{A}$ mit $(i, j = 1, \dots, s)$

$$(4.2) \quad \bar{e}_1 = \bar{u}_1, \quad ee_1 = e_1, \quad e_i e_j = \delta_{ij} e,$$

womit der Fall II. erledigt ist.

III. $r \geq 3$: Dann ist $\bar{\mathcal{A}}$ isomorph zu einer Algebra

$\mathcal{L}_t := \mathcal{L}_r(\mathcal{L}_t)$ mit $t \in \{0, 1, 2, 3\}$, wobei wie folgt definiert wird:

$$(A) \quad \mathcal{L}_0 := K$$

$$(B) \quad \mathcal{L}_1 := \mathbb{C} := K + j_1 K$$

$$(C) \mathcal{L}_2 = \mathcal{Q} := \mathbb{C} + j_2 \mathbb{C} \quad (\text{"Quaternionenalgebra"})$$

$$(D) \mathcal{L}_3 = \mathcal{C} := \mathcal{Q} + j_3 \mathcal{Q} \quad (\text{"Cayley-Algebra"})$$

In diesem Falle ist $r = 3$.

Wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von K ist hier die Algebra $\mathcal{L}_t$ ($t = 0, 1, 2, 3$) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. $\mathcal{L}_t$ hat man hier stets bezüglich der kanonischen Involution von $\mathcal{L}_t$ zu verstehen, welche im Falle $t = 0$ die Identität ist. Offenbar gilt $\dim_K \mathcal{L}_t = 2^t$, und für $0 \leq t' \leq t$ läßt sich $\mathcal{L}_{t'}$ in natürlicher Weise in $\mathcal{L}_t$ einbetten. Es gibt eine Basis $\{e_0, \dots, e_{2^{t-1}-1}\}$ von $\mathcal{L}_t$, so daß gilt

$$(\alpha, \beta \in M_t := \{0, \dots, 2^t - 1\}, \alpha \neq \beta)$$

$$(4.3) \quad e_0 e_\alpha = e_\alpha e_0 = e_\alpha, \quad e_\alpha^2 = -e_0 \quad (\alpha \neq 0),$$

$$(4.4) \quad e_\alpha e_\beta = -e_\beta e_\alpha \quad (\alpha \neq 0 \neq \beta).$$

Die Involution von $\mathcal{L}_t$ läßt sich beschreiben durch:

$$(4.5) \quad \overline{e_0} = e_0, \quad \overline{e_\alpha} = -e_\alpha \quad (\alpha \neq 0).$$

Für fest gegebenes ganzes t' ($0 \leq t' < t$) wird mit $\tau' := 2^{t'}$

$$(\alpha, \beta, \dots \in M_{t'}):$$

$$(4.6) \quad e_{\tau'} e_\alpha = e_{\tau' + \alpha},$$

$$(4.7) \quad (e_\alpha + e_{\tau'} e_\beta)(e_\gamma + e_{\tau'} e_\delta) := (e_\alpha e_\gamma - e_\delta \overline{e_\beta}) + e_{\tau'} (\overline{e_\alpha} e_\delta + e_\gamma \overline{e_\beta}).$$

Den Gleichungen (4.6), (4.7) entnimmt man, daß das Produkt zweier Elemente der hier ausgezeichneten Basis von $\mathcal{L}_t$ bis aufs Vorzeichen dieser Basis wieder angehört. Deshalb werden durch $(\alpha, \beta \in M_t)$:

$$(4.8) \quad e_\alpha e_\beta = \varepsilon(\alpha, \beta) e_{\pi(\alpha, \beta)}$$

Abbildungen $\varepsilon: M_t \times M_t \rightarrow \{-1, 1\}$, $\pi: M_t \times M_t \rightarrow M_t$ sinnvoll erklärt. Offenbar gilt

$$(4.9) \quad \pi(\alpha, \beta) = \pi(\beta, \alpha), \quad \varepsilon(\alpha, \beta) = -\varepsilon(\beta, \alpha),$$

letzteres jedoch nur dann, wenn $\alpha \neq 0 \neq \beta$ gilt.

Aus dieser Basis von $\mathfrak{t}$ gewinnt man auf natürliche Weise Elemente $\overline{u_i}, \overline{u_{ij}^{(\alpha)}}$ ($i, j = 1, \dots, r, i \neq j, \alpha \in M_t$) der zu $\mathfrak{g}_t$ isomorphen Algebra $\overline{\mathfrak{A}}$ mit den folgenden Eigenschaften

($i, j = 1, \dots, r; i \neq j; \alpha, \beta \in M_t$)

$$(B.1) \quad \overline{u_{ij}^{(\alpha)}} = \overline{u_{ji}^{(\alpha)}}; \quad \overline{u_{ij}^{(\alpha)}} = -\overline{u_{ji}^{(\alpha)}} \quad (\alpha \neq 0);$$

$\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_r}\} \cup \{\overline{u_{ij}^{(\alpha)}}; 1 \leq i < j \leq r, \alpha \in M_t\}$ ist eine Basis von $\overline{\mathfrak{A}}$.

(B.2) $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_r}\}$ ist ein vollständiges Orthogonalsystem von Idempotenten in $\overline{\mathfrak{A}}$ mit der Peirce-Zerlegung

$$\overline{\mathfrak{A}} = \sum_{i=1}^r \overline{\mathfrak{A}}_{ii} \quad \text{und} \quad \overline{u_{ij}^{(\alpha)}} \in \overline{\mathfrak{A}}_{ij}.$$

$$(B.3) \quad \overline{u_{ij}^{(\alpha)}} \overline{u_{ij}^{(\beta)}} = \delta_{\alpha\beta} (\overline{u_i} + \overline{u_j}); \quad \overline{u_{ij}^{(\alpha)}} \overline{u_{jk}^{(\beta)}} = \frac{1}{2} \varepsilon(\alpha, \beta) \overline{u_{ik}^{(\pi(\alpha, \beta))}}$$

Alle anderen Produkte zwischen den $\overline{u_i}, \overline{u_{ij}^{(\alpha)}}$ sind durch (B.1) und die Peirce-Zerlegung in (B.2) vollständig bestimmt.

Für das folgende wollen wir uns, wenn nicht ausdrücklich anders verfügt wird, der nachstehenden Konvention bedienen. Alle in diesem Paragraphen auftretenden Indizes $i, j, k, \dots$ sollen Zahlen aus $\{1, \dots, r\}$ bezeichnen. Verschiedene Indizes, die in ein und derselben Formel oder an ein und demselben Buchstaben erscheinen, sollen verschiedene Zahlen vertreten.

Die Behauptung, es gebe eine zu $\overline{\mathfrak{A}}$ isomorphe Unteralgebra von $\mathfrak{A}$ beweisen wir nun mit vollständiger Induktion nach t .

(A) $t = 0$: Es ist $M_0 = \{0\}$, und setzt man $\overline{u_{ij}} := \overline{u_{ij}^{(0)}}$, so besagt (B.3):

$$(4.10) \quad \overline{u_{ij}}^2 = \overline{u_i} + \overline{u_j}, \quad \overline{u_{ij}} \overline{u_{jk}} = \frac{1}{2} \overline{u_{ik}}.$$

Wir beachten nun (B.2) und finden daher gemäß Satz 2.1. ein vollständiges Orthogonalsystem $\{e_1, \dots, e_r\}$ von Idempotenten in $\mathfrak{A}$ mit $\overline{e_i} = \overline{u_i}$ für $i = 1, \dots, r$. Dazu gehört eine Peirce-

Zerlegung der Form $\alpha = \sum_{i,j} \alpha_{ij}$. Bei festem $i = 2, \dots, r$ verwenden wir Lemma 3.5. für $i := 1, j := i, s := 1, k := 0$. Dann ergibt sich ein $e_{1i} \in \alpha_{1i}$ mit

$$(4.11) \quad \overline{e_{1i}} = \overline{u_{1i}}, \quad e_{1i}^2 = e_1 + e_i.$$

Danach definieren wir für $i, j = 2, \dots, r$:

$$(4.12) \quad e_{i1} := e_{1i}, \quad e_{ij} := 2e_{i1}e_{1j}.$$

Nach I, Satz 2.2. (f) ist dann trivialerweise $e_{ij} \in \alpha_{ij}$ und $\overline{e_{ij}} = \overline{u_{ij}}$ wegen (4.10) für $i, j = 1, \dots, r$. Außerdem gilt nach (4.12) offenbar $e_{ij} = e_{ji}$.

Beh. 1. $e_{ij}e_{jk} = \frac{1}{2}e_{ik}$.

Bew. Nach (4.12) können wir $j > 1$ und aus Symmetriegründen $i < k$ annehmen. Zunächst wird für $i = 1$ mit (3.7) und (4.11):

$$e_{1j}e_{jk} = 2e_{1j}(e_{j1}e_{1k}) = e_{j1}^2e_{1k} = (e_j + e_1)e_{1k} = \frac{1}{2}e_{1k}.$$

Nun sei $i > 1$. Mit dem schon bewiesenen und (3.9) wird:

$$e_{ij}e_{jk} = 2(e_{i1}e_{1j})e_{jk} = 2e_{i1}(e_{1j}e_{jk}) = e_{i1}e_{1k} = \frac{1}{2}e_{ik},$$

womit Beh. 1 bewiesen ist.

Beh. 2. $e_{ij}^2 = e_i + e_j$.

Bew. Gemäß (4.11) sei o.B.d.A. $i \neq 1 \neq j$. Mit (3.2) kommt:

$$e_{ij}^2 = 2(e_{i1}e_{1j})e_{ij} = [e_{i1}^2]_{ii} + [e_{1j}^2]_{jj} = e_i + e_j.$$

Die anderen Produkte zwischen den e_i, e_{ij} werden durch die Peirce-Zerlegung in α auf dieselbe Weise geregelt wie die Produkte der entsprechenden Restklassen in $\overline{\alpha}$. Damit ist der Induktionsbeginn gesichert.

(B) $t-1 \rightarrow t$: Wir nehmen nun an, es sei die Behauptung bis $t-1$ bewiesen und $\overline{\alpha}$ isomorph zu $\mathfrak{g}_t$ ($1 \leq t \leq 3$). Dann betrachten wir den von

$$\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_r}\} \cup \{\overline{u_{ij}}; 1 \leq i < j \leq r, \alpha \in M_{t-1}\}$$

in $\overline{\alpha}$ erzeugten Vektorraum. Wegen (B.1) - (B.3) bildet dieser

eine Unteralgebra $\overline{\mathfrak{L}}$ von $\overline{\mathfrak{A}}$, die zu $\mathfrak{L}_{t-1}$ isomorph ist. Nun existiert eine Unteralgebra $\mathfrak{L}_1$ von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{L}_1/\text{Rad}\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{L}}$, wobei man annehmen kann, daß $e \in \mathfrak{L}_1$ gilt. Die Einfachheit von $\overline{\mathfrak{L}}$ ermöglicht hier die Inklusion $\text{Rad}\mathfrak{L}_1 \subset \text{Rad}\mathfrak{A}$. Da aber $\mathfrak{L}_1$ konservativ ist und $\text{Rad}\mathfrak{A}$ kein Idempotent enthält, gewinnt man sogar

$$(4.13) \quad \text{Rad}\mathfrak{L}_1 = \text{Rad}\mathfrak{A}.$$

Somit ist $\mathfrak{L}_1/\text{Rad}\mathfrak{L}_1 = \overline{\mathfrak{L}}$ und außerdem $(\text{Rad}\mathfrak{L}_1)^2 = 0$. Nach Induktionsannahme besitzt also $\mathfrak{L}_1$ eine zu $\overline{\mathfrak{L}}$ isomorphe Unteralgebra. Ein zugehöriger Isomorphismus wird gemäß Lemma 1.1. und (4.13) durch den natürlichen Homomorphismus $\mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathfrak{A}}$ vermittelt. Demgemäß existiert ein vollständiges Orthogonalsystem $\{e_1, \dots, e_r\}$ von Idempotenten in $\mathfrak{L}_1$ (also in $\mathfrak{A}$ wegen $e \in \mathfrak{L}_1$) mit der Peirce-Zerlegung $\mathfrak{A} = \sum_{i,j} \mathfrak{A}_{ij}$; außerdem gibt es $e_{ij}^{(\alpha)} \in \mathfrak{A}_{ij}$ ($\alpha \in M_{t-1}$), so daß gilt: ($\alpha, \beta \in M_{t-1}$)

$$(4.14) \quad \overline{e_i} = \overline{u_i}, \quad \overline{e_{ij}^{(\alpha)}} = \overline{u_{ij}^{(\alpha)}}$$

$$(4.15) \quad e_{ij}^{(\alpha)} = e_{ji}^{(\alpha)}, \quad e_{ij}^{(\alpha)} = -e_{ji}^{(\alpha)} \quad (\alpha \neq 0)$$

$$(4.16) \quad e_{ij}^{(\alpha)} e_{ij}^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta} (e_i + e_j), \quad e_{ij}^{(\alpha)} e_{jk}^{(\beta)} = \frac{1}{2} \varepsilon(\alpha, \beta) e_{ik}^{(\tau(\alpha, \beta))}.$$

Nun sei $\tau := 2^{t-1}$. Wir verwenden Lemma 3.5. für $i := 1$, $j := 2$, $s := \tau$, $k := \tau - 1$ und erhalten ein $e_{12}^{(\tau)} \in \mathfrak{A}_{12}$ mit ($\alpha \in M_{t-1}$)

$$(4.17) \quad \overline{e_{12}^{(\tau)}} = \overline{u_{12}^{(\tau)}}, \quad e_{12}^{(\tau)2} = e_1 + e_2, \quad e_{12}^{(\alpha)} e_{12}^{(\tau)} = 0.$$

Im folgenden wollen wir mit $\alpha, \beta, \dots$ Elemente aus M_{t-1} , mit $\nu, \mu, \dots$ solche aus M_t bezeichnen. Nun wird neben $e_{21}^{(\tau)} := -e_{12}^{(\tau)}$ wie folgt definiert:

$$(4.18) \quad e_{1j}^{(\tau+\alpha)} := -e_{j1}^{(\tau+\alpha)} := 2e_{12}^{(\tau)} e_{2j}^{(\alpha)} \quad (j \geq 3),$$

$$(4.19) \quad e_{ij}^{(\tau)} := 2e_{i1}^{(\alpha)} e_{1j}^{(\tau)} \quad (i, j \geq 2),$$

$$(4.20) \quad e_{12}^{(\tau+\alpha)} = -e_{21}^{(\tau+\alpha)} = 2e_{13}^{(\tau)}e_{32}^{(\alpha)} \quad (\alpha \neq 0),$$

$$(4.21) \quad e_{ij}^{(\tau+\alpha)} = 2e_{i1}^{(\tau)}e_{1j}^{(\alpha)} \quad (\alpha \neq 0; i, j \geq 2).$$

Damit ist $e_{ij}^{(\nu)}$ für alle i, j, ν wohldefiniert, und es gilt

$$(4.22) \quad e_{ij}^{(\nu)} \in \mathcal{A}_{ij}, \quad \overline{e_{ij}^{(\nu)}} = \overline{u_{ij}^{(\nu)}}.$$

Beh. 3. $e_{ij}^{(\alpha)}e_{jk}^{(\tau)} = \frac{1}{2} e_{ik}^{(\tau)}.$

Bew. Wegen (4.19) sei o.E. $j > 1$. Der Fall $i = 1$ erledigt sich mit (3.7):

$$e_{1j}^{(\alpha)}e_{jk}^{(\tau)} = 2e_{1j}^{(\alpha)}(e_{j1}^{(\alpha)}e_{1k}^{(\tau)}) = e_{j1}^{(\alpha)}e_{1k}^{(\tau)} = (e_1 + e_j)e_{1k}^{(\tau)} = \frac{1}{2} e_{1k}^{(\tau)}.$$

Für $i > 1$ sei zunächst $k = 1$; wegen (4.18) können wir dann $j > 2$ annehmen, und mit (3.9) wird:

$$e_{ij}^{(\alpha)}e_{j1}^{(\tau)} = 2e_{ij}^{(\alpha)}(e_{21}^{(\tau)}e_{2j}^{(\alpha)}) = 2e_{21}^{(\tau)}(e_{2j}^{(\alpha)}e_{ij}^{(\alpha)}) = \frac{1}{2} e_{i1}^{(\tau)}.$$

Wenn aber auch $k > 1$ gilt, so bekommt man mit dem schon bewiesenen:

$$e_{ij}^{(\alpha)}e_{jk}^{(\tau)} = 2(e_{i1}^{(\alpha)}e_{1j}^{(\alpha)})e_{jk}^{(\tau)} = 2e_{i1}^{(\alpha)}(e_{1j}^{(\alpha)}e_{jk}^{(\tau)}) = e_{i1}^{(\alpha)}e_{1k}^{(\tau)} = \frac{1}{2} e_{ik}^{(\tau)}.$$

Beh. 4. $e_{ij}^{(\tau)} = -e_{ji}^{(\tau)}.$

Bew. Die Aussage ist symmetrisch in i, j ; wegen (4.18) dürfen wir also $i > j > 1$ annehmen. Für $j = 2$ wird zunächst mit

(4.17) und (3.8):

$$e_{i2}^{(\tau)} = 4(e_{i2}^{(\alpha)}e_{21}^{(\alpha)})e_{i2}^{(\tau)} = 4(e_{i2}^{(\alpha)}e_{21}^{(\tau)})e_{i2}^{(\alpha)} = -2e_{11}^{(\tau)}e_{i2}^{(\alpha)} = -e_{2i}^{(\tau)}.$$

Im Falle $j > 2$ schließt man mit (3.9) und wendet das bewiesene an:

$$e_{ij}^{(\tau)} = 4e_{i1}^{(\alpha)}(e_{12}^{(\tau)}e_{2j}^{(\alpha)}) = 4e_{2j}^{(\alpha)}(e_{12}^{(\tau)}e_{i1}^{(\alpha)}) = -2e_{j2}^{(\alpha)}e_{2i}^{(\tau)} = -e_{ji}^{(\tau)}.$$

Aus Beh. 3 und Beh. 4 folgt

Beh. 5. $e_{ij}^{(\alpha)}e_{jk}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} e_{ik}^{(\tau)}.$

Beh. 6.

$$e_{ij}^{(\alpha)} e_{ij}^{(\tau)} = 0.$$

Bew. Mit (3.2) entsteht für ein $k \neq i, j$ ($r \geq 3$!):

$$(4.23) \quad e_{ij}^{(\alpha)} e_{ij}^{(\tau)} = 2e_{ij}^{(\alpha)} (e_{ik}^{(\alpha)} e_{kj}^{(\tau)}) = 2[e_{ik}^{(\alpha)} (e_{ij}^{(\alpha)} e_{kj}^{(\tau)})]_{ii} + [e_{kj}^{(\alpha)} e_{kj}^{(\tau)}]_{jj}.$$

Hieraus gewinnt man durch Vertauschen von α mit τ :

$$(4.24) \quad e_{ij}^{(\alpha)} e_{ij}^{(\tau)} = 2[e_{ik}^{(\alpha)} (e_{ij}^{(\tau)} e_{kj}^{(\alpha)})]_{ii} + [e_{kj}^{(\alpha)} e_{kj}^{(\tau)}]_{jj}.$$

Nun sei zunächst $j = 1$. Wegen (4.17) kann man dann $i > 2$ annehmen, und mit $k := 2$ verschwindet jeweils der zweite Summand auf der rechten Seite von (4.23), (4.24). Außerdem wird mit (3.8):

$$e_{i1}^{(\alpha)} e_{21}^{(\tau)} = 2e_{21}^{(\tau)} (e_{i2}^{(\alpha)} e_{21}^{(\alpha)}) = -2e_{21}^{(\alpha)} (e_{i2}^{(\alpha)} e_{21}^{(\tau)}) = -e_{i1}^{(\tau)} e_{21}^{(\alpha)}.$$

Berücksichtigt man dies beim Vergleich von (4.23) mit (4.24) (für $k = 2$), so erhält man $e_{i1}^{(\alpha)} e_{i1}^{(\tau)} = 0$.

Nun sei $j > 1$. Aus Symmetriegründen kann man dann auch $i > 1$ annehmen, und mit $k = 1$ beweist (4.23), daß

$e_{ij}^{(\alpha)} e_{ij}^{(\tau)} \in \mathcal{O}_{ii}$ gilt. Wegen Symmetrie in i, j ist dann aber auch $e_{ij}^{(\alpha)} e_{ij}^{(\tau)} \in \mathcal{O}_{jj}$, und daraus folgt: $e_{ij}^{(\alpha)} e_{ij}^{(\tau)} = 0$.

Beh. 7.

$$e_{ij}^{(\tau)} e_{jk}^{(\tau)} = -\frac{1}{2} e_{ik}^{(\alpha)}.$$

Bew. Hier herrscht Symmetrie in i, k , weshalb man $i > k$ unterstellen kann. Zunächst sei $j = 1$, was $i > k \geq 2$ erzwingt. Mit

Beh. 3 und (3.1) entsteht dafür:

$$(4.25) \quad e_{i1}^{(\tau)} e_{1k}^{(\tau)} = 2(e_{i2}^{(\alpha)} e_{21}^{(\tau)}) e_{1k}^{(\tau)} = 2(e_{21}^{(\tau)} e_{1k}^{(\tau)}) e_{i2}^{(\alpha)} - 2e_{21}^{(\tau)} (e_{1k}^{(\tau)} e_{i2}^{(\alpha)}).$$

Für $k = 2$ erhält man hieraus mit

$$e_{i1}^{(\tau)} e_{12}^{(\tau)} = -e_{i2}^{(\alpha)} - e_{i1}^{(\tau)} e_{12}^{(\tau)}$$

die Behauptung. Für $k > 2$ verschwindet auf der rechten Seite von (4.25) der zweite Summand, während man auf den ersten das schon bewiesene anwenden kann.

Nun sei $j > 1$. Wir wenden wiederum (3.1) an:

$$e_{ij}^{(\tau)} e_{jk}^{(\tau)} = 2(e_{i1}^{(\tau)} e_{1j}^{(\alpha)}) e_{jk}^{(\tau)} = 2(e_{1j}^{(\alpha)} e_{jk}^{(\tau)}) e_{i1}^{(\tau)} - 2e_{1j}^{(\alpha)} (e_{i1}^{(\tau)} e_{jk}^{(\tau)}).$$

Im Falle $k = 1$ verschwindet der erste Summand wegen Beh. 6, für $k > 1$ hingegen der zweite. Mit dem schon bewiesenen folgt dann die Behauptung.

Beh. 8. $e_{ij}^{(\tau)2} = e_i + e_j.$

Bew. Wegen der Symmetrie in i, j können wir von $i > j$ ausgehen.

Mit (3.2) erhält man:

$$(4.26) \quad e_{ij}^{(\tau)2} = 2(e_{ik}^{(\alpha)} e_{kj}^{(\tau)}) e_{ij}^{(\tau)} = e_i + [e_{kj}^{(\tau)2}]_{jj}.$$

Nun sei zunächst $j = 1$. Wegen (4.17) können wir dann $i > 2$ annehmen, und mit $k = 2$ bringt (4.26) die Behauptung, Für $j > 1$ setze man $k = 1$ in (4.26) und verwende das bewiesene.

Beh. 9. $e_{ij}^{(\nu)} = -e_{ji}^{(\nu)} \quad (\nu \neq 0).$

Bew. Wegen (4.15), (4.18), (4.20) und Beh. 4 können wir annehmen, es sei $\nu = \tau + \alpha$, $\alpha \neq 0$ und $i \neq 1 \neq j$. Dann wird mit Beh. 6 und (3.8):

$$e_{ij}^{(\tau+\alpha)} = 4e_{i1}^{(\tau)} (e_{1i}^{(\alpha)} e_{ij}^{(\tau)}) = 4e_{1i}^{(\alpha)} (e_{1i}^{(\tau)} e_{ij}^{(\tau)}) = -2e_{j1}^{(\tau)} e_{1i}^{(\alpha)} = -e_{ji}^{(\tau+\alpha)}.$$

Beh. 10. $e_{ij}^{(\tau)} e_{jk}^{(\nu)} = \frac{1}{2} \varepsilon(\tau, \nu) e_{ik}^{(\tau+\nu)}$, also insbesondere

$$e_{ij}^{(\tau)} e_{jk}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} e_{ik}^{(\tau+\alpha)}, \quad e_{ij}^{(\tau)} e_{jk}^{(\tau+\alpha)} = -\frac{1}{2} e_{ik}^{(\alpha)}.$$

Bew. (a) $\nu = \alpha$: Wegen Beh. 5 sei o.E. $\alpha \neq 0$ und $j \neq 1$ wegen (4.21). Im folgenden sei die Möglichkeit „ $1 = k$ “ zugelassen.

Mit (3.1) wird:

$$(4.27) \quad e_{ij}^{(\tau)} e_{jk}^{(\alpha)} = 2(e_{i1}^{(\tau)} e_{1j}^{(\alpha)}) e_{jk}^{(\alpha)} \\ = 2(e_{1j}^{(\alpha)} e_{jk}^{(\alpha)}) e_{i1}^{(\tau)} - 2e_{1j}^{(\alpha)} (e_{jk}^{(\alpha)} e_{i1}^{(\tau)}).$$

Nun diskutieren wir die folgende Fallunterscheidung:

1) $i = 1$: $(\alpha) k = 2$: Wegen (4.20) sei o.E. $j > 3$. (4.27) mit

1: = 3 bringt:

$$e_{1j}^{(\tau)} e_{j2}^{(\alpha)} = e_{13}^{(\tau)} e_{32}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} e_{12}^{(\tau+\alpha)}.$$

(3) $k > 2$: Man setze 1: = 2:

$$e_{1j}^{(\tau)} e_{jk}^{(\alpha)} = e_{12}^{(\tau)} e_{2k}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} e_{1k}^{(\tau+\alpha)}.$$

2) $i > 1$: (α) $k > 1$: Mit 1: = 1 wird

$$e_{ij}^{(\tau)} e_{jk}^{(\alpha)} = e_{i1}^{(\tau)} e_{1k}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} e_{ik}^{(\tau+\alpha)}.$$

(3) $k = 1$: Dann schließen wir mit (3.8) wie folgt:

$$e_{ij}^{(\tau)} e_{j1}^{(\alpha)} = 2(e_{i1}^{(\alpha)} e_{1j}^{(\tau)}) e_{j1}^{(\alpha)} = 2(e_{i1}^{(\alpha)} e_{1j}^{(\alpha)}) e_{1j}^{(\tau)} = -\frac{1}{2} e_{i1}^{(\tau+\alpha)} = \frac{1}{2} e_{i1}^{(\tau+\alpha)}.$$

(b) $\nu = \tau + \alpha$: Wegen Beh. 7 sei hier o.E. $\alpha \neq 0$. Wir verwenden (3.7) und Beh. 8:

$$e_{ij}^{(\tau)} e_{jk}^{(\tau+\alpha)} = 2e_{ij}^{(\tau)} (e_{ji}^{(\tau)} e_{ik}^{(\alpha)}) = -e_{ij}^{(\tau)2} e_{ik}^{(\alpha)} = -\frac{1}{2} e_{ik}^{(\alpha)}.$$

Beh. 11. $e_{ij}^{(\nu)} e_{ij}^{(\mu)} = 0 \quad (\nu \neq \mu).$

Bew. Die Behauptung ist symmetrisch in i, j und ν, μ . Wir können daher $\nu < \mu$ und dann wegen (4.16) und Beh. 6 sogar $\mu = \tau + \alpha$ mit $\alpha \neq 0$ annehmen. Dann kommt mit Beh. 10 und (3.2):

$$(4.28) \quad e_{ij}^{(\nu)} e_{ij}^{(\mu)} = 2(e_{ik}^{(\tau)} e_{kj}^{(\alpha)}) e_{ij}^{(\nu)} \\ = 2[e_{ik}^{(\tau)} (e_{kj}^{(\alpha)} e_{ij}^{(\nu)})]_{ii} - \epsilon(\tau, \nu) [e_{kj}^{(\alpha)} e_{kj}^{(\tau(\tau, \nu))}]_{jj}.$$

1) $\nu = \beta$: Dann ist der erste Summand auf der rechten Seite von (4.28) gleich $-\epsilon(\beta, \alpha) [e_{ik}^{(\tau)} e_{ik}^{(\tau(\beta, \alpha))}]_{ii}$, verschwindet also wegen $\pi(\beta, \alpha) \in M_{t-1}$ und Beh. 6. Mithin gehört $e_{ij}^{(\nu)} e_{ij}^{(\mu)}$ zu $\mathcal{A}_{jj}$, daher aus Symmetriegründen auch zu $\mathcal{A}_{ii}$, und daraus folgt die Behauptung.

2) $\nu = \tau + \beta$: Dann gilt $\alpha \neq \beta$, $\pi(\tau, \nu) = \beta$, also verschwindet der zweite Summand auf der rechten Seite von (4.28) wegen (4.16). Danach aber schließt man wie unter 1).

Beh. 12.
$$e_{ij}^{(\nu)} e_{jk}^{(\mu)} = \frac{1}{2} \varepsilon(\nu, \mu) e_{ik}^{(\pi(\nu, \mu))}.$$

Bew. Vermöge Beh. 9 sieht man leicht, daß auch diese Aussage symmetrisch in ν, μ ist. Daher sei o.E. $\nu < \mu$ und wegen (4.16) sowie Beh. 10 $\mu = \tau + \alpha$ mit $\alpha \neq 0$. Wir schließen nun mit Beh. 11 und (3.8): (o.E. sei auch $\nu \neq \tau$)

$$(4.29) \quad e_{ij}^{(\nu)} e_{jk}^{(\mu)} = 2e_{ij}^{(\nu)} (e_{ji}^{(\tau)} e_{ik}^{(\alpha)}) = 2e_{ij}^{(\tau)} (e_{ij}^{(\nu)} e_{ik}^{(\alpha)}).$$

1) $\nu = \rho$: Nach (4.29) wird dann

$$e_{ij}^{(\rho)} e_{jk}^{(\tau+\alpha)} = -\varepsilon(\alpha, \rho) e_{ij}^{(\tau)} e_{kj}^{(\pi(\alpha, \rho))} = -\frac{1}{2} \varepsilon(\alpha, \rho) \varepsilon(\pi(\alpha, \rho), \tau) e_{ik}^{(\tau + \pi(\alpha, \rho))},$$

und das liefert Beh. 12, wenn man $\varepsilon(\rho, \tau + \alpha)$, $\pi(\rho, \tau + \alpha)$ gemäß (4.7) bestimmt.

2) $\nu = \tau + \rho$: (4.29) verwandelt sich gemäß 1) in

$$\begin{aligned} e_{ij}^{(\tau+\rho)} e_{jk}^{(\tau+\alpha)} &= -\varepsilon(\tau+\rho, \alpha) e_{ij}^{(\tau)} e_{jk}^{(\pi(\tau+\rho, \alpha))} = -\varepsilon(\alpha, \rho) e_{ij}^{(\tau)} e_{jk}^{(\tau + \pi(\alpha, \rho))} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon(\alpha, \rho) e_{ik}^{(\pi(\alpha, \rho))}, \end{aligned}$$

und gemäß (4.7) ist das Beh. 12.

Beh. 13.
$$e_{ij}^{(\nu)2} = e_i + e_j.$$

Bew. Nach (4.16) und Beh. 8 können wir annehmen, es sei $\nu = \tau + \alpha$ mit $\alpha \neq 0$. Dann erhält man vermöge (3.2):

$$e_{ij}^{(\tau+\alpha)2} = 2(e_{ik}^{(\tau)} e_{kj}^{(\alpha)}) e_{ij}^{(\tau+\alpha)} = [e_{ik}^{(\tau)2}]_{ii} + [e_{kj}^{(\alpha)2}]_{jj} = e_i + e_j.$$

Damit gilt das Analogon von (4.16) für $\alpha, \rho \in M_t$. Da die anderen Produkte zwischen den $e_i, e_{ij}^{(\alpha)}$ ($\alpha \in M_t$) durch die Peirce-Zerlegung in $\mathcal{A}$ genauso geregelt werden wie die entsprechenden Produkte der $\overline{u}_i, \overline{u}_{ij}^{(\alpha)}$ in $\overline{\mathcal{A}}$, hat sich nunmehr der von

$$\{e_1, \dots, e_r\} \cup \{e_{ij}^{(\alpha)}; 1 \leq i < j \leq r, \alpha \in M_t\}$$

in $\mathcal{A}$ erzeugte Vektorraum als eine zu $\overline{\mathcal{A}}$ isomorphe Unteralgebra von $\mathcal{A}$ erwiesen. Damit ist die Induktion beendet und gleichzeitig Satz 4.1. gesichert.

§ 5. Eine Wedderburn-Zerlegung unter der Annahme „ $(\text{Rad } \mathfrak{A})^2 = 0$ “

1. Das Ergebnis des vorigen Paragraphen läßt sich nun wie folgt verallgemeinern:

Satz 5.1. Es sei $\mathfrak{A}$ eine strikt konservative Lie-Tripel-Algebra über dem Körper K einer Charakteristik ungleich 2, so daß $\bar{\mathfrak{A}}$ separabel ist und $(\text{Rad } \mathfrak{A})^2 = 0$ gilt. Dann erfüllt $\mathfrak{A}$ den Satz von Wedderburn.

Beweis. (a) Wir nehmen zunächst an, $\mathfrak{A}$ besitze ein Einselement e und betrachten dann den Spezialfall

1), daß K algebraisch abgeschlossen ist. $\bar{\mathfrak{A}}$ stellt eine halbeinfache Jordan-Algebra dar, genügt also einer Darstellung

$$(5.1) \quad \bar{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{A}}_1 \oplus \dots \oplus \overline{\mathfrak{A}}_r$$

mit einfachen Idealen $\overline{\mathfrak{A}}_i$ von $\bar{\mathfrak{A}}$. Bezeichnet $\bar{d}_i$ das Einselement von $\overline{\mathfrak{A}}_i$, so wird $\{\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_r\}$ ein vollständiges Orthogonalsystem von Idempotenten in $\bar{\mathfrak{A}}$. Wir verwenden Satz 2.1. und finden ein vollständiges Orthogonalsystem $\{c_1, \dots, c_r\}$ von Idempotenten in $\mathfrak{A}$ mit $\bar{c}_i = \bar{d}_i$ für $i = 1, \dots, r$. Aus (5.1) folgt nun sofort

$$\bar{\mathfrak{A}}_1(\bar{c}_i) = \overline{\mathfrak{A}}_i,$$

und aus Lemma 2.2. ersieht man die Isomorphie

$$(5.2) \quad \mathfrak{A}_1(c_i)/\text{Rad } \mathfrak{A}_1(c_i) \cong \overline{\mathfrak{A}}_i.$$

Nun ist $\mathfrak{A}_1(c_i)$ konservativ und $(\text{Rad } \mathfrak{A}_1(c_i))^2 = 0$ gemäß (2.2). Da außerdem $\mathfrak{A}_1(c_i)/\text{Rad } \mathfrak{A}_1(c_i)$ wegen (5.2) einfach ist, können wir Satz 4.1. anwenden und erhalten eine Unteralgebra $\mathfrak{T}_i$ von $\mathfrak{A}_1(c_i)$, die zu $\mathfrak{A}_1(c_i)/\text{Rad } \mathfrak{A}_1(c_i)$, mit (5.2) also zu $\overline{\mathfrak{A}}_i$ isomorph ist. Nach I, Satz 2.2. (c) stimmt nun $\mathfrak{A}_1(c_i)$ mit $\mathfrak{A}_i$

überein, Teil (f) desselben Satzes zeigt also, daß sich die Algebren $\mathcal{A}_1(c_i)$ bei Multiplikation paarweise annullieren.

Daher hat es einen Sinn, die Teilalgebra

$$\mathcal{T} := \mathcal{T}_1 \circ \dots \circ \mathcal{T}_r$$

von $\mathcal{A}$ zu bilden, die wegen (5.1) zu $\bar{\mathcal{A}}$ isomorph ist. In Anbetracht von Lemma 1.1. erfüllt $\mathcal{A}$ daher den Satz von Wedderburn.

2) Nun sei K beliebig, K' bezeichne dann den algebraischen Abschluß von K . Da sich die Bedingung „ $(\text{Rad } \mathcal{A})^2 = 0$ “ kennzeichnen läßt durch Identitäten, die in allen Argumenten linear sind, bleibt sie wegen der Separabilität von $\mathcal{A}$ und I , Lemma 5.1. bei Grundkörpererweiterung erhalten. Daher erfüllt $\mathcal{A}'$ die Voraussetzungen von Satz 5.1., nach 1) existiert also eine Unteralgebra $\mathcal{T}'$ von $\mathcal{A}'$, die zu $\bar{\mathcal{A}}'$ isomorph ist. Letztere ist, da $\text{Rad } \mathcal{A}'$ mit $(\text{Rad } \mathcal{A})'$ übereinstimmt, ihrerseits isomorph zu $\bar{\mathcal{A}}'$, und es gibt einen Standard-Isomorphismus $W_1: \bar{\mathcal{A}}' \rightarrow \bar{\mathcal{A}}'$, der für $u \in \mathcal{A}$ die Bedingung

$$(5.3) \quad W_1(u + \text{Rad } \mathcal{A}') = u + \text{Rad } \mathcal{A} = \bar{u}$$

erfüllt. Fixiert man $W_2: \mathcal{T}' \rightarrow \bar{\mathcal{A}}'$ durch

$$(5.4) \quad W_2 u := u + \text{Rad } \mathcal{A}',$$

so wird $W := W_1 \circ W_2$ ein Isomorphismus $\mathcal{T}' \rightarrow \bar{\mathcal{A}}'$. Nun sei

$$\mathcal{T}_1 := W^{-1} \bar{\mathcal{A}} = W_2^{-1} W_1^{-1} \bar{\mathcal{A}},$$

dann ist $\mathcal{T}_1$ eine Algebra über K , die zu $\bar{\mathcal{A}}$ isomorph ist.

(5.3) und (5.4) beweisen, daß $\mathcal{T}_1$ zu $\mathcal{A}$ gehört. Denn ein $u \in \mathcal{T}_1$

hat die Gestalt $u = \sum_{i=1}^r \alpha_i b_i$ mit $\alpha_i \in K'$ und einer Basis $b_1, \dots, b_r$ von $\mathcal{A}$ über K , so daß $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r$ eine solche von $\bar{\mathcal{A}}$ ist und die $b_{r+1}, \dots, b_n$ in $\text{Rad } \mathcal{A}$ liegen. Dann wird

$$Wu = \sum_{i=1}^r \alpha_i W b_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i \bar{b}_i \in \bar{\mathcal{A}};$$

somit liegen die α_i bereits in K , u selbst also in $\mathcal{A}$.

(b) Besitzt α kein Einselement, so adjungieren wir ein solches und erhalten die Algebra $\hat{\alpha}$. Nach Satz 2.2. ist $\hat{\alpha}$ strikt konservativ. Ist nun $\tilde{K}$ eine Körpererweiterung von K , so sind $\tilde{\alpha}$ und $\bar{\alpha}$ zueinander isomorph wegen der Separabilität von $\bar{\alpha}$ und $(\text{Rad } \alpha)^2 = 0$. Daher gilt

$$\tilde{\tilde{\alpha}} \cong \tilde{\alpha} \cong \hat{\alpha} \cong \tilde{\hat{\alpha}} \cong \bar{\alpha}.$$

Somit ist $\tilde{\tilde{\alpha}}$ halbeinfach, $\bar{\alpha}$ selbst also separabel. Nach Teil (a) gibt es also eine Unteralgebra $\hat{\tau}$ von $\hat{\alpha}$ mit

$$\hat{\alpha} = \hat{\tau} + \text{Rad } \alpha.$$

Für $\tau := \alpha \cap \hat{\tau}$ folgt daraus die Zerlegung

$$\alpha = \tau + \text{Rad } \alpha,$$

womit der Satz bewiesen ist.

§ 6. Weitere Hilfssätze.

1. Um die Frage, ob sich in Satz 5.1. die Voraussetzung „ $(\text{Rad } \mathfrak{A})^2 = 0$ “ wenigstens teilweise entbehren läßt, erfolgreich behandeln zu können, benötigen wir einige Vorbereitungen, welche wir in diesem Paragraphen zusammenfassen. Wir gehen aus von einer Lie-Tripel-Algebra $\mathfrak{A}$ über K und einem Ideal $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{A}$.

Lemma 6.1. $\mathfrak{A}\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{Q}^2$ ist ein Ideal in $\mathfrak{A}$, und es gilt $\mathfrak{A}\mathfrak{Q}^3 \subset \mathfrak{Q}^2$.

Beweis. Um $\mathfrak{A}\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{Q}^2$ als Ideal in $\mathfrak{A}$ nachzuweisen, genügt es, die Inklusion $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{Q}^2) \subset \mathfrak{A}\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{Q}^2$ herzuleiten. Dazu betrachten wir $v, w \in \mathfrak{Q}$ und $u, y \in \mathfrak{A}$. Mit I, (1.3) erkennt man dann das Gewünschte. Nun sei $u \in \mathfrak{A}$ und $v, w, y \in \mathfrak{Q}$. Wiederum mit I, (1.3) zeigt sich, daß $u(v(wy))$ zu $\mathfrak{Q}^2$ gehört, womit die Inklusion $\mathfrak{A}\mathfrak{Q}^3 \subset \mathfrak{Q}^2$ bewiesen ist.

2. Zu dem Ideal $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{A}$ suchen wir nun einen Vektorraum Y in $\mathfrak{A}$ auf mit

$$(6.1) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{Q} + Y.$$

Wir nehmen nun an, es sei sowohl $\mathfrak{Q} \neq \mathfrak{A}$ als auch $\mathfrak{Q}^2 \neq 0$ und fixieren außerdem eine Basis $B := \{b_1, \dots, b_r\}$ von Y . Nun definieren wir rekursiv Vektorräume $Z^{(k)}$ (k ganz, ≥ 0) in $\mathfrak{A}$ durch die Festsetzung

$$(6.2) \quad Z^{(0)} := \mathfrak{Q}^2, \quad Z^{(k+1)} := (YZ^{(k)})^2.$$

Offenbar liegt $Z^{(k)}$ für jedes ganze $k \geq 0$ in $\mathfrak{Q}^2$. Es ist klar, daß nach Vorgabe einer Basis $E^{(0)} = \{z_1^{(0)}, \dots, z_s^{(0)}\}$ von $\mathfrak{Q}^2$ durch

(6.3) $E^{(k+1)} := \{(b_i z_1)(b_j z_2); i, j = 1, \dots, r, z_\lambda \in E^{(k)}\}$
induktiv ein Erzeugendensystem $E^{(k)}$ des Vektorraumes $Z^{(k)}$ definiert wird. Zu jedem Element $z \in E^{(k)}$ ($k \geq 0$) gibt es also

eine Darstellung als Produkt von Faktoren aus B und $E^{(0)}$, das in der aus (6.3) ersichtlichen Weise aufgebaut ist. Wir wollen uns im folgenden eine solche Darstellung fest auswählen denken und dann von der expliziten Faktorisierung von z sprechen. Wir beweisen nun, wenn k jetzt und im folgenden eine ganze Zahl ≥ 0 bezeichnet:

Lemma 6.2. Für $i, j = 1, \dots, r$ und $z_1, z_2 \in E^{(k)}$ gilt

$$b_i[(b_i z_1)(b_j z_2)] \in \mathfrak{A}^2.$$

Beweis. Mit $u := b_j z_2 \in \mathfrak{A}$, $y := w := b_i$, $v := z_1$ wird aus I, (1.3) nach kurzer Rechnung:

$$2b_i(u(b_i z_1)) = 2b_i((ub_i)z_1) - z_1(ub_i^2) + u(z_1 b_i^2).$$

Berücksichtigt man hier $\text{Char } K \neq 2$ und Lemma 6.1., so folgt Lemma 6.2.

Lemma 6.3. Es sei $k \geq 1$, und das Element b_i erscheine in der expliziten Faktorisierung eines Vektors $z \in E^{(k)}$. Dann ist

$$b_i z \in \mathfrak{A}^2.$$

Beweis. Wir schließen mit vollständiger Induktion nach k . Den Fall $k = 1$ impliziert Lemma 6.2. für $k = 0$. Ist die Aussage für k bewiesen, und tritt b_i in der expliziten Faktorisierung von $z \in E^{(k+1)}$ auf, so betrachte man gemäß (6.3) eine Darstellung

$$(6.4) \quad z = (b_j z_1)(b_l z_2)$$

mit $z_\lambda \in E^{(k)}$. Gemäß Lemma 6.2. können wir hier o.E. annehmen, es sei $j \neq i \neq l$. Da aber b_i in z erscheint, gilt dies wegen (6.4) auch für z_1 oder z_2 . O.E. sei das erstere der Fall. Mit $u := b_l z_2 \in \mathfrak{A}$, $y := b_i$, $w := b_j$, $v := z_1$ erbringt I, (1.3) sowie Lemma 6.1. und die Induktionsannahme:

$$\begin{aligned} b_i z &= b_i(u(b_j z_1)) = b_i((ub_j)z_1) + u(z_1(b_i b_j)) - \\ &\quad - z_1(u(b_i b_j)) - b_j(u(z_1 b_i)) + b_j(z_1(ub_i)) \in \mathfrak{A}^2. \end{aligned}$$

3. Für ganzes $k \geq 0$ definieren wir nun rekursiv

$$(6.5) \quad \mathfrak{A}_0 := \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}_{k+1} := \mathfrak{A} \mathfrak{A}_k^2 + \mathfrak{A}_k^2,$$

$$(6.6) \quad \mathfrak{A}_{(0)} := \mathfrak{A}^2, \quad \mathfrak{A}_{(k+1)} := (\mathfrak{A} \mathfrak{A}_{(k)})^2.$$

Nach Lemma 6.1. ist $\mathfrak{A}_k$ stets ein Ideal in $\mathfrak{A}$. Wir beweisen

Lemma 6.4. Für eine ganze Zahl $k \geq 0$ gilt

$$\mathfrak{A}_{(k)} \subset \mathfrak{Z}^{(k)} + \mathfrak{A}^3, \quad \mathfrak{A}_{k+1} \subset \mathfrak{A} \mathfrak{A}_{(k)} + \mathfrak{A}^2.$$

Beweis. Der Fall $k = 0$ wird durch die Definitionen (6.2),

(6.5), (6.6) trivial. Ist die Aussage des Lemmas bis k bewiesen, so folgt daraus für $k+1$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{(k+1)} &= (\mathfrak{A} \mathfrak{A}_{(k)})^2 \subset (\mathfrak{A} \mathfrak{Z}^{(k)} + \mathfrak{A} \mathfrak{A}^3)^2 \\ &= (\mathfrak{A} \mathfrak{Z}^{(k)})^2 + (\mathfrak{A} \mathfrak{A}^3)^2 + (\mathfrak{A} \mathfrak{Z}^{(k)})(\mathfrak{A} \mathfrak{A}^3) \\ &\subset (\mathfrak{A} \mathfrak{Z}^{(k)})^2 + \mathfrak{A}^3, \end{aligned}$$

wobei die letzte Inklusion mit Lemma 6.1. zustandekommt. Gemäß (6.1) ergibt sich nun

$$(\mathfrak{A} \mathfrak{Z}^{(k)})^2 \subset (\mathfrak{Y} \mathfrak{Z}^{(k)} + \mathfrak{A}^3)^2 \subset (\mathfrak{Y} \mathfrak{Z}^{(k)})^2 + \mathfrak{A}^3 = \mathfrak{Z}^{(k+1)} + \mathfrak{A}^3.$$

Damit folgt der erste Teil von Lemma 6.4. Für den zweiten wird:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{k+2} &= \mathfrak{A} \mathfrak{A}_{k+1}^2 + \mathfrak{A}_{k+1}^2 \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{A} \mathfrak{A}_{(k)})^2 + \mathfrak{A}(\mathfrak{A}^2)^2 \\ &\quad + \mathfrak{A}[(\mathfrak{A} \mathfrak{A}_{(k)})^2] + (\mathfrak{A} \mathfrak{A}_{(k)})^2 + (\mathfrak{A}^2)^2 + (\mathfrak{A} \mathfrak{A}_{(k)}) \mathfrak{A}^2 \\ &\subset \mathfrak{A} \mathfrak{A}_{(k+1)} + \mathfrak{A}^2. \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt beendet und das Lemma vollständig bewiesen.

Satz 6.1. Es sei $\mathfrak{A}$ eine Lie-Tripel-Algebra über dem Körper K einer Charakteristik ungleich 2 und $\mathfrak{A}$ ein Ideal in $\mathfrak{A}$.

Dann existiert eine natürliche Zahl k mit $\mathfrak{A}_k \subset \mathfrak{A}^2$.

Beweis. O.B.d.A. sei $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^2 \neq 0$. Es genügt, mit einem gewissen $k \in \mathbb{N}$

$$(6.7) \quad \alpha z^{(k)} \subset \mathcal{Q}^2$$

zu zeigen. Denn dann wird mit Lemma 6.1. und Lemma 6.5.:

$$\mathcal{Q}_{k+1} \subset \alpha \mathcal{Q}_{(k)} + \mathcal{Q}^2 \subset \alpha z^{(k)} + \alpha \mathcal{Q}^3 + \mathcal{Q}^2 \subset \mathcal{Q}^2.$$

Zum Beweis von (6.7) gilt es, eine natürliche Zahl k zu finden mit $b_i z \in \mathcal{Q}^2$ für $i = 1, \dots, r$ und $z \in E^{(k)}$, da $\alpha z^{(k)} \subset \mathcal{Q}^3$, also auch zu $\mathcal{Q}^2$ gehört. Wir setzen nun zu $k \in \mathbb{N}$

$$(6.8) \quad E^{(k)} := \{z; z \in E^{(k)}, \exists i \in \{1, \dots, r\}: b_i z \notin \mathcal{Q}^2\}$$

und behaupten:

Ist $z \in E^{(k)}$, so treten in der expliziten Faktorisierung von z mindestens k verschiedene Faktoren aus B auf.

Diese Behauptung ist trivial für $k = 0$, und unter der Annahme ihrer Gültigkeit für k betrachten wir ein $z \in E_1^{(k+1)}$.

Nach Definition besteht eine Darstellung

$$(6.9) \quad z = (b_j z_1)(b_1 z_2)$$

mit $z_i \in E^{(k)}$. Ist nun $b_j z_1 \in \mathcal{Q}^2$, so wird $z \in \mathcal{Q}^3$, also $b_i z \in \mathcal{Q}^2$ für $i = 1, \dots, r$ gemäß Lemma 6.1., und das ist ein Widerspruch. Daraus folgt mit $b_j z_1 \notin \mathcal{Q}^2$, daß z_1 zu $E_1^{(k)}$ gehört und daher mit einer expliziten Faktorisierung versehen ist, in der mindestens k verschiedene Faktoren aus B auftreten. Wegen Lemma 6.3. kann keiner von diesen mit b_j übereinstimmen, weshalb in der expliziten Faktorisierung von z mindestens $k+1$ verschiedene Faktoren aus B vorkommen. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nun sei $k := r$. Wäre dann $E_1^{(k)} \neq \emptyset$ und $z \in E_1^{(k)}$, so würden nach der soeben bewiesenen Aussage alle Elemente von B in der expliziten Faktorisierung von z auftreten. Nach Lemma 6.3. käme dann $b_i z \in \mathcal{Q}^2$ für $i = 1, \dots, r$, und das ist ein Widerspruch. Also gilt $E_1^{(k)} = \emptyset$, und damit gilt der Satz.

4. Wir benötigen noch eine Ergänzung zu den konservativen Lie-Tripel-Algebren und beweisen

Satz 6.2. Es sei $\mathcal{A}$ eine Lie-Tripel-Algebra über einem Körper K der Charakteristik ungleich 2,3. $\mathcal{Q} \subset \text{Rad } \mathcal{A}$ sei ein Ideal in $\mathcal{A}$, und das Radikal einer jeden Grundkörpererweiterung von $\mathcal{Q} := \mathcal{A}/\mathcal{Q}$ enthalte kein Idempotent. Ist $\mathcal{A}$ dann

- (a) schwach konservativ,
 - (b) konservativ,
 - (c) strikt konservativ und außerdem $\bar{\mathcal{A}}$ separabel,
- so besteht die entsprechende Eigenschaft auch für $\mathcal{Q}$.

Beweis. Das Korollar von I, Satz 5.3. ergibt

$$(6.9) \quad \text{Rad } \mathcal{Q} = \text{Rad } \mathcal{A}/\mathcal{Q},$$

und nun erhält man mit dem zweiten Isomorphiesatz

$$(6.10) \quad \bar{\mathcal{Q}} \cong \bar{\mathcal{A}}.$$

Nun definieren wir eine Abbildung $W: \bar{\mathcal{Q}} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ durch ($u \in \mathcal{A}$)

$$(6.11) \quad W([u]_{\mathcal{Q}} + \text{Rad } \mathcal{Q}) := u + \text{Rad } \mathcal{A}.$$

Diese Definition ist logisch sinnvoll, denn aus $[u]_{\mathcal{Q}} + \text{Rad } \mathcal{Q} = [v]_{\mathcal{Q}} + \text{Rad } \mathcal{Q}$ ($u, v \in \mathcal{A}$) folgt $[u - v]_{\mathcal{Q}} \in \text{Rad } \mathcal{Q}$, wegen (6.9) also $u - v \in \text{Rad } \mathcal{A}$. Trivialerweise ist W ein Algebren-Homomorphismus, von dem man überdies leicht die Bijektivität zeigen kann. Insgesamt ist W also ein Isomorphismus.

(a) Nun sei $\mathcal{A}$ schwach konservativ und $[d]_{\mathcal{Q}} + \text{Rad } \mathcal{Q}$ idempotent ($d \in \mathcal{A}$). Nach (6.11) ist dann $d + \text{Rad } \mathcal{A}$ ein Idempotent in $\bar{\mathcal{A}}$, und nach Voraussetzung existiert ein Idempotent $c \in \mathcal{A}$ mit $c + \text{Rad } \mathcal{A} = d + \text{Rad } \mathcal{A}$. Anwendung von W^{-1} bringt

$$(6.12) \quad [c]_{\mathcal{Q}} + \text{Rad } \mathcal{Q} = [d]_{\mathcal{Q}} + \text{Rad } \mathcal{Q}.$$

Da $\text{Rad } \mathcal{A}$ kein Idempotent enthält, gilt $c \notin \text{Rad } \mathcal{A}$, also erst

recht $c \notin \mathfrak{Q}$. Deshalb ist $[c]_{\mathfrak{Q}}$ ein Idempotent in $\mathfrak{Z}$ und wegen (5.12) ein Vertreter der Restklasse $[d]_{\mathfrak{Q}} + \text{Rad } \mathfrak{Z}$.

(b) $\mathfrak{A}$ sei konservativ. Zu einer Unteralgebra $\mathfrak{Z}_1$ von $\mathfrak{Z}$ suchen wir eine Teilalgebra $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{A}$ auf mit $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{Q} = \mathfrak{Z}_1$. Da auch $\mathfrak{A}_1$ konservativ ist und $\mathfrak{Q}$ kein Idempotent enthält, gewinnt man aus (2.14) die Inklusion $\mathfrak{Q} \subset \text{Rad } \mathfrak{A}_1$. Nunmehr können wir (a) verwenden, und da $\text{Rad } \mathfrak{Z}_1$ gemäß §1, 1. kein Idempotent enthält, erweist sich $\mathfrak{Z}_1$ als schwach konservativ.

(c) $\mathfrak{A}$ sei strikt konservativ und $\overline{\mathfrak{A}}$ separabel. Nach (6.10) wird dann auch $\overline{\mathfrak{Z}}$ separabel, und für eine Körpererweiterung L von K ist

$$\mathfrak{Z}_L = \mathfrak{A}_L/\mathfrak{Q}_L.$$

Wegen Satz 2.4. ist hier $\mathfrak{Q}_L \subset \text{Rad } \mathfrak{A}_L$, und (b) liefert die Konservativität von $\mathfrak{A}_L/\mathfrak{Q}_L$, also von $\mathfrak{Z}_L$, da $\text{Rad } \mathfrak{Z}_L$ nach Voraussetzung kein Idempotent besitzt.

§ 7. Die allgemeine Wedderburn-Zerlegung.

1. Nachdem wir in den bisherigen Paragraphen die wesentlichen Hilfsmittel entwickelt haben, sind wir nun in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 7.1. (Der Struktursatz von WEDDERBURN) Es sei $\mathfrak{A}$ eine Lie-Tripel-Algebra über dem Körper K einer Charakteristik ungleich 2,3 mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) $\mathfrak{A}$ ist strikt konservativ.
- (b) $\bar{\mathfrak{A}}$ ist separabel.
- (c) Für jede Unter algebra $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{A}$ mit $0 \neq \text{Rad } \mathfrak{A}_1 =$

$$= \mathfrak{A}_1 \cap \text{Rad } \mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}_1 \text{ gilt } (\text{Rad } \mathfrak{A}_1)^2 \not\subseteq \text{Rad } \mathfrak{A}_1.$$

Dann existiert eine halbeinfache (Jordan -) Teilalgebra $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{A}$ mit

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{T} + \text{Rad } \mathfrak{A}.$$

Beweis. Wir schließen mit vollständiger Induktion nach $n := \dim \mathfrak{A}$. Der Induktionsanfang „ $n = 0$ “ ist trivial. Nun sei der Satz bis n bewiesen und $\mathfrak{A}$ eine Lie-Tripel-Algebra der Dimension $n + 1$ über K , welche den Voraussetzungen (a),(b),(c) genügt. Wir können o.B.d.A. $\text{Rad } \mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}$ und wegen Satz 5.1. auch $(\text{Rad } \mathfrak{A})^2 \neq 0$ annehmen. Dann sind die Prämissen von (c) erfüllt für $\mathfrak{A}$ an Stelle von $\mathfrak{A}_1$, weshalb man

$$(7.1) \quad 0 \neq (\text{Rad } \mathfrak{A})^2 \not\subseteq \text{Rad } \mathfrak{A}$$

erhält. Im Sinne von (6.5) betrachten wir nun für $k \geq 0$ die Vektorräume

$$(7.2) \quad \mathfrak{Q}_0 := \text{Rad } \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{Q}_{k+1} := \mathfrak{A} \mathfrak{Q}_k^2 + \mathfrak{Q}_k^2,$$

die gemäß Lemma 6.1. sogar Ideale in $\mathfrak{A}$ sind. Nun gilt

$$(7.3) \quad 0 \neq \mathfrak{Q}_1 \not\subseteq \text{Rad } \mathfrak{A},$$

wo die erste Ungleichung wegen (7.1) trivial ist. Außerdem hat man offenbar $\mathcal{Q}_1 \subset \text{Rad } \mathcal{A}$. Stünde hier das Gleichheitszeichen, so käme mit (7.2) sofort $\mathcal{Q}_k = \text{Rad } \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Satz 6.1. existiert aber eine Zahl k mit $\mathcal{Q}_k \subset (\text{Rad } \mathcal{A})^2$, und das würde den Widerspruch $(\text{Rad } \mathcal{A})^2 = \text{Rad } \mathcal{A}$ ermöglichen. Damit ist (7.3) bewiesen.

Nun betrachten wir die Algebra $\mathcal{E} := \mathcal{A}/\mathcal{Q}_1$. Dafür gilt

$$(7.4) \quad \text{Rad } \mathcal{E} = \text{Rad } \mathcal{A} / \mathcal{Q}_1, \quad \overline{\mathcal{E}} \cong \overline{\mathcal{A}}.$$

Mit $\overline{\mathcal{A}}$ ist also auch $\overline{\mathcal{E}}$ separabel, für eine Körpererweiterung L von K wird daher $\mathcal{E}_L / \text{Rad}_L \mathcal{E}$ halbeinfach. Das erzwingt

$$(7.5) \quad \text{Rad } \mathcal{E}_L \subset \text{Rad}_L \mathcal{E}.$$

Der Definition von $\mathcal{Q}_1$ und (7.4) entnimmt man nun, daß $(\text{Rad } \mathcal{E})^2$ verschwindet. Somit gilt auch $(\text{Rad}_L \mathcal{E})^2 = 0$, und nun läßt sich (7.5) gemäß I, Lemma 5.1. zu einer Gleichheit verschärfen. Daher wird

$$(\text{Rad } \mathcal{E}_L)^2 = 0$$

für jede Körpererweiterung L von K , was eine Anwendung von Satz 6.2.(c) ermöglicht und dadurch als strikt konservativ ausweist. Nun liefert Satz 5.1. eine Unteralgebra $\mathcal{T}_1$ von $\mathcal{E}$ mit

$$(7.6) \quad \mathcal{T}_1 \cong \overline{\mathcal{E}} \cong \overline{\mathcal{A}}.$$

Zu $\mathcal{T}_1$ existiert eine Teilalgebra $\mathcal{A}_1$ von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_1/\mathcal{Q}_1 = \mathcal{T}_1$. $\mathcal{A}_1$ ist strikt konservativ, und wegen der Halbeinfachheit von $\mathcal{T}_1$ gilt $\text{Rad } \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{Q}_1$. Andererseits enthält $\mathcal{Q}_1$ wegen (7.3) kein Idempotent, so daß sich insgesamt

$$(7.7) \quad \mathcal{A}_1 / \text{Rad } \mathcal{A}_1 = \mathcal{T}_1, \quad \text{Rad } \mathcal{A}_1 = \mathcal{Q}_1$$

ergibt. Daher ist $\overline{\mathcal{A}_1}$ wegen (7.6) insbesondere separabel und die Voraussetzungen (a) und (b) sind für $\mathcal{A}_1$ erfüllt. Nun ist

$\alpha_1 \cap \text{Rad} \alpha$ ein Ideal in α_1 , das kein Idempotent enthält.

(2.14) und (7.3) liefern daher $\alpha_1 \cap \text{Rad} \alpha \subset \text{Rad} \alpha_1 = \mathfrak{A}_1 \subset \alpha_1 \cap \text{Rad} \alpha$, also

$$(7.8) \quad \text{Rad} \alpha_1 = \alpha_1 \cap \text{Rad} \alpha.$$

Nun sei α' eine Unter algebra von α_1 mit $0 \neq \text{Rad} \alpha' = \alpha' \cap \text{Rad} \alpha_1 \neq \alpha'$; dann wird mit (7.8)

$$\text{Rad} \alpha' = \alpha' \cap \alpha_1 \cap \text{Rad} \alpha = \alpha' \cap \text{Rad} \alpha.$$

α' erfüllt als Unter algebra von α die Prämissen von (c), und daher gilt $(\text{Rad} \alpha')^2 \not\subseteq \text{Rad} \alpha'$. Damit sind die Voraussetzungen (a), (b), (c) für α_1 an Stelle von α bestätigt.

Wäre nun $\alpha_1 = \alpha$, so käme $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{S}$ wegen (7.7), also wäre $\mathfrak{S} \cong \overline{\alpha}$, d.h. $\mathfrak{A}_1 = \text{Rad} \alpha$ im Widerspruch zu (7.3). Folglich ist $\alpha_1 \not\subseteq \alpha$, und wir können die Induktionsannahme anwenden. Sie liefert eine Unter algebra $\mathfrak{T}$ von α_1 , also von α , die zu $\overline{\alpha}_1$, nach (7.7), (7.6) also zu $\overline{\alpha}$ isomorph ist. Gemäß Lemma 1.1. ist damit der Induktionsschritt beendet.

2. Wir wollen noch eine Bemerkung zu der etwas unübersichtlichen Bedingung (c) anschließen: Es sei $\text{Rad} \alpha$ auflösbar und α_1 eine Unter algebra von α . Nach I, Satz 5.5. ist dann auch $\text{Rad} \alpha_1$ auflösbar, und gilt außerdem $\text{Rad} \alpha_1 \neq 0$, so würde die Annahme $(\text{Rad} \alpha_1)^2 = \text{Rad} \alpha_1$ die Gültigkeit von

$$(\text{Rad} \alpha_1)^{(k)} = \text{Rad} \alpha_1$$

für alle ganzen $k \geq 1$ nach sich ziehen und daher der Auflösbarkeit von $\text{Rad} \alpha_1$ widersprechen. In Satz 7.1. impliziert also die Auflösbarkeit von $\text{Rad} \alpha$ die Bedingung (c).

3. Beispiele, welche die Voraussetzungen von Satz 7.1. erfüllen und keine Jordan-Algebren sind, haben wir bisher nicht kennengelernt. Diese Lücke wollen wir im folgenden beheben.

Wir beginnen mit einem allgemeinen Prinzip zur Konstruktion von Lie-Tripel-Algebren, die mit ihrem eigenen Radikal übereinstimmen. Es beruht auf der Tatsache, daß sich die charakteristische Identität $I, (1.3)$ aus Bestandteilen additiv zusammensetzt, die man durch sukzessive Multiplikation einer Variablen mit drei anderen gewinnen kann. Demgemäß stellt eine kommutative Algebra $\mathcal{A}$ über K mit $\mathcal{A}^4 = 0$ notwendig eine Lie-Tripel-Algebra dar. Überdies ist $\mathcal{A}$ auflösbar und daher $\mathcal{A} = \text{Rad } \mathcal{A}$. Denn seien $u_i, v_i \in \mathcal{A}$ für $i = 1, 2, 3$, so setze man $u := u_3 v_3$, $v := u_2$, $w := v_2$, $y := u_1 v_1$ in $I, (1.3)$, Dann gewinnt man $(u_1 v_1)((u_2 v_2)(u_3 v_3)) = 0$, also mit $(\mathcal{A}^2)^3 = 0$ auch $\mathcal{A}^{(3)} = 0$. Geht man von $\mathcal{A}$ über zu $\hat{\mathcal{A}}$, indem man ein Element e adjungiert, so erhält man mit $\text{Rad } \hat{\mathcal{A}} = \text{Rad } \mathcal{A} = \mathcal{A}$ die Wedderburn-Zerlegung

$$\hat{\mathcal{A}} = K e + \text{Rad } \mathcal{A}.$$

Da $\mathcal{A}$ trivialerweise strikt konservativ ist, gilt das gemäß Satz 2.2. auch für $\hat{\mathcal{A}}$; außerdem ist $\text{Rad } \hat{\mathcal{A}}$ auflösbar und $\bar{\mathcal{A}} = K\bar{e}$ separabel. Somit sind alle Voraussetzungen von Satz 7.1. für $\hat{\mathcal{A}}$ erfüllt, und es ist klar, daß eine Iteration des obigen Adjunktionsprozesses an diesem Tatbestand nichts ändert. Daher existieren echte Lie-Tripel-Algebren beliebig hohen Primitivgrades, welche den Voraussetzungen von Satz 7.1. genügen, wenn es überhaupt eine kommutative Algebra $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}^4 = 0$ gibt, die keine Jordan-Algebra ist.

Diese Prämisse trifft zu; als besonders einfaches Beispiel betrachte man etwa die auf einem dreidimensionalen Vektorraum

	b_1	b_2	b_3
b_1	0	0	0
b_2	0	b_3	0
b_3	0	0	b_1

mit einer Basis b_1, b_2, b_3 über K durch die obige Multiplikationstafel definierte Algebra $\mathcal{A}$. Ersichtlich gilt $\mathcal{A}^4 = 0$ und mit $b_2^2 = b_3$ wird

$$b_2^3 = b_2^4 = 0, (b_2^2)^2 = b_1.$$

Folglich ist $\mathcal{A}$ keine Jordan-Algebra.

4. Wir wollen noch ein Beispiel von echten Lie-Tripel-Algebren vorlegen, die den Voraussetzungen von Satz 7.1. genügen, sich aber nicht durch mehrfache Adjunktion von Einselementen aus ihrem Radikal gewinnen lassen. Die Algebra besitze die Basis $c_1, c_2, b_1, \dots, b_5$ über K und sei durch die folgende Multiplikationstafel erklärt:

	c_1	c_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
c_1	c_1	0	b_1	b_2	b_3	$\frac{1}{2}b_4$	$\frac{1}{2}b_5$
c_2	0	c_2	0	0	0	$\frac{1}{2}b_4$	$\frac{1}{2}b_5$
b_1	b_1	0	0	0	0	0	0
b_2	b_2	0	0	b_3	0	b_5	0
b_3	b_3	0	0	0	b_1	0	0
b_4	$\frac{1}{2}b_4$	$\frac{1}{2}b_4$	0	b_5	0	b_1	0
b_5	$\frac{1}{2}b_5$	$\frac{1}{2}b_5$	0	0	0	0	0

$\mathcal{A}$ läßt sich in der Gestalt

$$(7.9) \quad \mathcal{A} = (Kc_1 \oplus Kc_2) \dot{+} \mathcal{A}$$

zerlegen, wo $\mathfrak{A} := \langle \{b_1, \dots, b_5\} \rangle$ ein Ideal in $\mathfrak{A}$ ist. Es gilt $\mathfrak{A}^4 = 0$; so erweist sich $\mathfrak{A}$ als eine auflösbare Lie-Tripel-Algebra, die mit $\text{Rad } \mathfrak{A}$ übereinstimmt. Daß auch $\mathfrak{A}$ eine Lie-Tripel-Algebra darstellt, hat man nun durch direkte Rechnung zu bestätigen. Da $\mathfrak{A}$ in $\langle \{b_1, b_2, b_3\} \rangle$ ein isomorphes Bild von $\mathfrak{K}$ besitzt, ist $\mathfrak{A}$ keine Jordan-Algebra.

$\mathfrak{A}$ hat das Einselement $e := c_1 + c_2$ sowie den Primitivgrad 2 und $\{c_1, c_2\}$ bildet ein vollständiges Orthogonalsystem von Idempotenten in $\mathfrak{A}$ mit

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1(c_1) &= \langle \{c_1, b_1, b_2, b_3\} \rangle, \quad \mathfrak{A}_{1/2}(c_1) = \langle \{b_4, b_5\} \rangle, \\ \mathfrak{A}_0(c_1) &= \mathfrak{K}c_2.\end{aligned}$$

Adjunktion von Einselementen an $\mathfrak{A}$ liefert Algebren, die garantiert nie zu $\mathfrak{A}$ isomorph sind. Denn sie besitzen nur Idempotenten, deren linksreguläre Darstellungen höchstens die Eigenwerte 0 und 1 haben.

Die Identität (7.9) beweist, daß $\overline{\mathfrak{A}}$ mit $\overline{\mathfrak{K}c_1} \oplus \overline{\mathfrak{K}c_2}$ übereinstimmt und daher separabel ist. Schließlich ist $\mathfrak{A}$ strikt konservativ.

Wir wollen den Beweis skizzieren. Man zeigt:

- 1) Jede auflösbare Untereralgebra von $\mathfrak{A}$ liegt in $\mathfrak{A}$.
- 2) Ist $\mathfrak{L}$ eine Untereralgebra von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{A}$, so gilt

$$\text{PrGr } \mathfrak{L} = \text{PrGr } \mathfrak{L}/\mathfrak{A}.$$

- 3) Ist $\mathfrak{L}$ eine Untereralgebra von $\mathfrak{A}$, so gilt

$$\text{PrGr } \mathfrak{L} = \text{PrGr}(\mathfrak{L} + \mathfrak{A}).$$

Für eine beliebige Untereralgebra $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{A}$ ergibt sich nun mit 1)

$$\text{Rad } \mathfrak{L} = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{A}.$$

Danach aber wird mit 2), 3):

$$\text{PrGr } \overline{\mathfrak{L}} = \text{PrGr } \mathfrak{L} + \mathfrak{Q} / \mathfrak{Q} = \text{PrGr}(\mathfrak{L} + \mathfrak{Q}) = \text{PrGr } \mathfrak{L} .$$

Nun erweist sich $\mathcal{O}$ gemäß Satz 2.3. als konservativ, und da man für jede Körpererweiterung von $\mathcal{O}$ ebenso schließen kann, ist die Behauptung bewiesen.

5. Schließlich bemerken wir, daß $\mathfrak{K}$ und damit auch $\mathfrak{Q} = \text{Rad } \mathcal{O}$ keine Teilalgebra einer Algebra des in I, § 6 untersuchten Typs sein kann. Denn für $u := b_1 + b_2 + b_3 \in \mathfrak{K}$ wird

$$u^2 = b_1 + b_3, \quad u^3 = b_1, \quad u^4 = 0.$$

Folglich ist u nilpotent; wäre es also mitsamt seinen Potenzen Element einer Algebra $[X; \lambda, \sigma; e, f]$ über K , so müßte wegen I, Lemma 6.2. notwendig $u^3 = 0$ gelten, was nicht der Fall ist.

Literaturverzeichnis.

- [1] BRAUN, H., KOECHER, M.: Jordan-Algebren. Springer, Berlin - Göttingen - Heidelberg.
- [2] ALBERT, A.A.: A structure theory for Jordan algebras. Ann. of Math. 48 (1947) 546 - 567.
- [3] ALBERT, A.A.: A theory of power associative commutative algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950) 503 - 527.
- [4] JACOBSON, N.: Lie and Jordan triple systems. Amer. J. of Math. 71 (1949) 149 - 170.
- [5] KOECHER, M.: Jordan algebras and their applications. Lecture notes Univ. of Minnesota, Minneapolis 1962.
- [6] KOKORIS, L.A.: Simple power associative algebras of degree two. Ann. of Math. 64 (1956) 544 - 550.
- [7] PENICO, A.J.: The Wedderburn principal theorem for Jordan algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951) 404 - 420.
- [8] REDEI, L.: Algebra. Geest & Portig, Leipzig 1959.
- [9] SCHAFER, R.D.: An introduction to nonassociative algebras. Lecture notes Oklahoma State Univ., Stillwater 1961.
- [10] TAFT, E.J.: Invariant Wedderburn factors. Ill. J. of Math. 1 (1957) 565 - 573.
- [11] TITS, J.: A theorem on generic norms of strictly power associative algebras. Proc. Am. Math. Soc. 15 (1964) 35 - 36.

Lebenslauf.

Am 25. April 1939 wurde ich in Hamburg geboren. Im März 1959 legte ich am städtischen Konrad - Schlaun - Gymnasium zu Münster (Westf.) die Reifeprüfung ab. Vom Sommer-Semester 1959 bis zum Winter-Semester 1962/63 studierte ich Mathematik, Physik und Philosophie an der Universität Münster, wo ich im November 1962 die Vorprüfung für das Lehramt an höheren Schulen bestand. Seit dem Sommer - Semester 1963 studiere ich an der Universität München.

